

### Über ein ebenes un stetiges Temperaturspannungsproblem

Von *Max Hieke* in Halle

*Zur Auffindung der Wärmespannungen in einem ungleichmäßig erwärmten Körper setzte man bisher die Differenzierbarkeit der Wärmeverteilungsfunktion voraus. Diese Voraussetzung wird in der vorliegenden Arbeit fallen gelassen, und als Beispiel werden die Wärmespannungen in einem unendlich langen Zylinder bei Vorgabe einer un stetigen Temperaturverteilung ermittelt.*

*To determine the thermal stresses in an unequally heated body, the heat distribution was, till now, supposed to have a derivative. In this paper, this hypothesis is abandoned, and as example, the thermal stresses in a cylinder of infinite length are determined, if a discontinuous heat distribution is assumed.*

*Jusqu'à présent on supposait que, pour déterminer les tensions thermiques dans un corps inégalement chauffé, on pouvait différentier la fonction de la distribution de la chaleur. Cette hypothèse est abandonnée dans cet article, et pour exemple les tensions thermiques dans un cylindre de longueur infinie sont déterminées à la supposition d'une distribution inconstante de la chaleur.*

Чтобы определить термические напряжения в неравномерно нагреваемом теле до сих пор предполагалась дифференцируемость функции теплового распределения. В настоящей работе эта предпосылка отбрасывается, а в качестве примера выявляются термические напряжения в бесконечно длинном цилиндре при заданном неравномерном распределении температуры.

Die in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen sind:

$E$  der Elastizitätsmodul.

$G = \frac{Em}{2(m+1)}$  der Schubmodul.

$m$  das reziproke P o i s s o n'sche Querkontraktionsverhältnis.

$\varepsilon_{ij}$  die Verformungskomponenten einer nicht K i r c h h o f f'schen Formänderung, der kein Verschiebungsvektor entspricht. Wahlweise wird auch gesetzt:  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_{33} = \varepsilon_z$ ,  $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \gamma_{xy}$ ,  $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \gamma_{yz}$ ,  $\varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = \gamma_{zx}$ .

$\sigma_{ij}$  die Spannungen des im Gefolge der obigen Verzerrungen im Körper vorhandenen Spannungszustandes (oder wie es heißt: Selbst- oder Eigenspannungszustandes). Wahlweise wird auch gesetzt:  $\sigma_{11} = \sigma_x = s$ ,  $\sigma_{22} = \sigma_y = s$ ,  $\sigma_{33} = \sigma_z = s = \sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau_{xy}$ ,  $\sigma_{23} = \tau_{xz} = \sigma_{32}$ ,  $\sigma_{31} = \sigma_{13} = \tau_{zx}$ .

$u_i$  die Komponenten eines Verschiebungsvektors, der vom unverzerrten Anfangszustand aus gerechnet wird.

$e_{ij}$  der vom undeformierten Anfangszustand angefangen und aus dem Verschiebungsvektor abgeleitete Verzerrungszustand. (K i r c h h o f f'scher oder verträglicher Verzerrungszustand). Wahlweise auch:  $e_{11} = e_x$ ,  $e_{22} = e_y$ ,  $e_{33} = e_z$ ,  $e_{12} = e_{xy}$  usw.

$\delta_{ij} = 0$  für  $i \neq j$ ,  $\delta_{ij} = 1$  für  $i = j$ .

#### Problemstellung

Die bisherigen Rechnungen, die Wärmespannungen in ungleichmäßig erwärmten Körpern zu finden, fanden statt unter der Voraussetzung der Differenzierbarkeit der Wärmeverteilungsfunktion. Der auf F. N e u m a n n [1] zurückgehende Ansatz von W. V o i g t [2]

$$G \left\{ \frac{m}{m-2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \Delta u_i \right\} + \frac{mE\alpha}{m-2} \frac{\partial T}{\partial x_i} + X_i = \varrho \ddot{u}_i \quad i = 1, 2, 3$$

worin  $T$  die Differenz zwischen Körper- und Außentemperatur und  $\alpha$  die Wärmeausdehnungszahl sind und die übrigen Größen die übliche Bedeutung haben, setzt differenzierbare Temperaturverteilung voraus. Die gleiche Voraussetzung gilt auch bei späteren Betrachtungen. Unter Beschränkung auf die Gleichgewichtsaufgabe, also auf den Fall  $\ddot{u}_i = 0$  sollen nun die Wärmespannungen in einem unendlich langen Zylinder bei Vorgabe einer un stetigen Temperaturverteilung ermittelt werden. Bei Inanspruchnahme der Verträglichkeitsbedingungen für den ebenen Verzerrungsfall wird eine inhomogene Bipotentialgleichung zum Ausgang

der Untersuchung. Für die Randwerte gilt dabei die Voraussetzung der Spannungsfreiheit des Randes.

Zunächst ist dann eine Poissonsche Differentialgleichung zu betrachten. Die Kenntnis eines partikulären Integrales dieser inhomogenen Differentialgleichung verschafft die Randwerte zur Bestimmung der Lösung der homogenen biharmonischen Differentialgleichung. Das Problem ist dann nach Bekanntwerden der Spannungsfunktion, aus dieser die Spannungen auszurechnen. Auf die Ausrechnung der Verschiebung wurde verzichtet. Die Spannungen selbst wurden nur für die innere Umgebung des Randes ermittelt.

### Einleitung

Zu bestimmen sind die Eigenspannungen im Inneren eines von äußeren eingepprägten Spannungen freien, unendlich langen, kreiszylindrischen Körpers, der ungleichmäßig erwärmt ist.

Die Temperaturverteilung soll sich zunächst noch mit den Koordinaten des Kreisquerschnittes stetig ändern. Von der Koordinate längs der Achsenrichtung des Zylinders soll die Temperatur nicht abhängen.

Über diesen Gegenstand sind schon zahlreiche Untersuchungen gemacht worden, darunter auch solche mit zeitabhängiger Temperaturverteilung. In allen Fällen beschäftigte man sich mit der Herstellung der Ausdrücke für die Spannungen und die Verschiebungen. Die Temperaturverteilung wurde natürlich als stetige Funktion der Koordinaten vorausgesetzt.

Außer dem vollen Kreiszylinder wurde auch der hohle Kreiszylinder betrachtet.

Franz Neumann [3] untersuchte einen zusammengesetzten Körper. Der Querschnitt des Körpers ist rechteckig. Die Frage wird bei ihm als gewöhnliches Spannungsproblem behandelt. Bei spannungsfreier Oberfläche und dem Fehlen von Massenkraften sollte nach dem Eindeutigkeitssatz von Kirchhoff [4] auch das Innere eines Kontinuums spannungsfrei sein. Beim Beweis dieser Behauptung ist vorausgesetzt, daß die Verzerrungskomponenten sich eindeutig aus einem stetigen Verschiebungsvektor ableiten lassen. Weiter wird vorausgesetzt, daß zwischen dem Verzerrungstensor und dem Spannungstensor eine eindeutige Zuordnung besteht. Zudem werden die Randbedingungen jeweils am unverformten Körper befriedigt.

Die Verletzung einer dieser Voraussetzungen macht die Existenz mehrerer Lösungen des Elastizitätsproblems möglich. Geben wir die Voraussetzung der eindeutigen Bezogenheit von Verzerrungs- und Spannungstensor zueinander auf, so ist ein Selbstspannungszustand möglich. Dieser kann bedingt sein durch eine Unstetigkeit des Verschiebungsvektors oder dadurch, daß die Verzerrungen nicht eindeutig aus einem Verschiebungsvektor abgeleitet werden können.

Die Unstetigkeit im Verschiebungsvektor kann hervorgebracht werden durch eine starre Verschiebung zweier Ebenen gegeneinander, wobei nach Vornahme der Versetzung diese Flächen wieder fest miteinander verbunden worden sind. Die Kräfte und Momente der solcherart erzeugbaren Distorsionen lassen sich aus sechs Elementardistorsionen herleiten, indem man die resultierenden Dynamen an den Schnittflächen in Komponenten zerlegt. Die erzeugten Spannungszustände sind im allgemeinen räumlich.

Sind die Eigenspannungen nicht durch Unstetigkeiten der Verschiebungen, sondern durch Verzerrungen ohne zugehörige äußere Spannungen, aus denen ein Spannungstensor bestimmt werden könnte, aufgebracht, so läßt sich die Aufgabe durch Definition eines verträglichen Verzerrungstensors lösen.

Das Auftreten nicht axialsymmetrischer Eigenspannungsverteilungen macht zudem noch eine Annahme über die Eigenschaften der Selbstspannungsursachen in Abhängigkeit von der Koordinatenrichtung der Zylinderachse notwendig.

Die Unabhängigkeit der Eigenspannungsursachen von dieser Koordinate rechtfertigt nicht die Annahme einer gleichen Tatsache für die Eigenspannungen selbst.

Die Gewährleistung des ebenen Verzerrungszustandes ist bei endlicher Zylinderlänge nur gegeben bei der zusätzlichen Forderung, daß eine bleibende Dilatation in Richtung der Zylinderachse nicht erfolgt. Allen solchen nur von den Zylinderkoordinaten abhängigen Verformungen ist gemeinsam, daß man keine mechanische Ursache dafür kennt und daß demzufolge eine eindeutige Zuordnung zwischen dem Verschiebungsvektor und den Verzerrungsgrößen nicht stattfindet. Diese nicht von eingepprägten Kräften oder Spannungen verursachten Verformungen können durch elektrische, magnetische, thermische oder andere physikalische und chemische Ursachen hervorgebracht werden. Solche temporären oder auch bleibenden Verzerrungen werden nicht ausschließlich Dilatationen wie im Falle einer reinen Dichteänderung sein müssen, sondern sie können auch gestaltändernden Einflüssen ihre Entstehung verdanken.

Nach notwendigen Festsetzungen über die Werte der Elastizitätskonstanten beim Auftreten innerer inkompatibler Verformungen, die ihre Nachbarschaft in einen Spannungszustand versetzen, kann man das H o o k e s c h e Gesetz in folgender Form ansetzen

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2G} \left\{ 2 \sigma_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} - \left( \sigma_{ij} + \frac{s}{m+1} \right) \delta_{ij} \right\}.$$

Berücksichtigt man Massenkräfte nicht, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad i = 1, 2, 3.$$

Die zugehörigen Oberflächenbedingungen ausgedrückt durch die Eigenspannungen lauten

$$\sigma_{ij} \cos(n, x_j) = 0.$$

### Berechnung der Eigenspannungen aus bekannten Anfangsverformungen

Die Tatsache, daß Eigenspannungen einem Verzerrungstensor nicht eindeutig zugeordnet werden können, hat häufig zur Folge, daß man sie direkt aus den Gleichungen des H o o k e s c h e n Gesetzes berechnet, wenn die Gesetze der Anfangsverformungen bekannt sind oder wenn sinnvolle Annahmen über diese gemacht werden können.

Kehrt man das H o o k e s c h e Gesetz mit Verwendung der Abkürzungen  $\vartheta'$  und  $\vartheta$  für die Summen  $e_{ii}$  und  $\varepsilon_{ii}$  um, so ergibt sich

$$\sigma_{ij} = G \left[ e_{ij} - \varepsilon_{ij} + \left\{ \frac{2}{m-2} (\vartheta' - \vartheta) + e_{ij} - \varepsilon_{ij} \right\} \delta_{ij} \right] \quad i = 1, 2, 3.$$

Setzt man dies in die Gleichungen der Gleichgewichtsbedingungen  $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$   $i, j = 1, 2, 3$  ein, so erhält man

$$\Delta u_i + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \vartheta'}{\partial x_i} = \frac{2}{m-2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial x_i}.$$

Das heißt, daß ein Eigenspannungszustand immer entstanden gedacht werden kann durch nichtkirchhoffsche Verformungen und elastische Verzerrungen in einem ursprünglich unverformten Körper.

Ordnet man nun den aus einem Verschiebungsvektor mit den Komponenten  $u_i$  ableitbaren Verzerrungen  $e_{ij}$  einen Spannungstensor über die Beziehungen

$$G \left( \Delta u + \frac{m}{m-2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

zu, so erhält man die Relation

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = G \left( \frac{2}{m-2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial x_i} \right) \quad j = 1, 2, 3.$$

nicht über  $i$  summieren!

Der kompatible Verzerrungstensor  $e_{ij}$  ist einem Spannungstensor zugeordnet, der in einem anfänglich spannungslos gedachten Körper durch die Volumkräfte

$$- G \left( \frac{2}{m-2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial x_i} \right) \quad j = 1, 2, 3$$

aufgebracht zu denken ist.

Bei reiner Dilatation würde sich daraus wegen  $\varepsilon_{ij} = 0$ ,  $\varepsilon_{ii} = \frac{\vartheta}{3}$  (nicht summieren) ergeben

$$- 2 G \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{3-2+m}{3(m-2)} \vartheta = - \frac{E m}{3(m-2)} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}$$

ist also eine Potentialfunktion der Volumkräfte.

Daraus ist zu ersehen, daß die Volumkräfte im Falle von reinen Dichteänderungen als Gradienten des Potentials  $\frac{E m}{3(m-2)} \vartheta$  ausgedrückt werden können und daß an der

Berandung des Körpers eine fiktive Spannung vom Betrage dieses Potentials anzubringen ist. Nach der Ausrechnung der Spannungskomponenten aus den Divergenzbedingungen der Eigen-

spannungen muß die Größe  $\frac{E m}{3(m-2)} \vartheta$  davon abgezogen werden, d. h. aber nur von den Normalspannungen. Die verschwindenden Divergenzen  $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$  werden ja nur von den Eigen-

spannungen  $\sigma = -k + \sigma'$  befriedigt, aus denen auch die Randbedingungen  $\sigma'_r = k_r$  folgen, wenn mit  $k$  vorübergehend die fiktiven Volumkräfte bezeichnet werden.

Das wäre also eine Möglichkeit, um bei Kenntnis der Volumkräfte die Eigenspannungen aus den verschwindenden Divergenzen, den einzigen Gleichungen, die die mathematische Elastizitätstheorie für diesen Fall neben der Bedingung der Spannungsfreiheit des Randes bereitstellen kann, zu errechnen. Die Kompatibilitätsbedingungen werden hierbei nur zur Einführung einer Hilfsgröße in Anspruch genommen. Diese Hilfsgröße war der eindeutige Verzerrungstensor der Deformation aus dem unverformten Anfangszustand. Es ist jedoch auch mit Verwendung der für diesen Tensor gültigen Kompatibilitätsbedingungen die Frage nach den Eigenspannungen als definierte mathematische Aufgabenstellung zu formulieren, d. h. daraus eine Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie zu machen.

### Berechnung der Spannungen aus den Kompatibilitätsbeziehungen

Die zu Anfang in einem Körper vorhandenen vorübergehenden oder auch bleibenden nichtkirchhoffschen Verzerrungen genügen wie gesagt den Kompatibilitätsbedingungen nicht. Ihnen ist kein Verschiebungsvektor so zugeordnet, daß seine Komponenten sich unabhängig vom Integrationsweg durch Linienintegrale

$$u_i = (u_i)_0 + \int \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$$

darstellen lassen.

Gelten diese Gleichungen für die  $u_i$ , so müssen die  $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$  gleichfalls unabhängig vom Integrationsweg sein. Sie müssen also gleichfalls vollständige Differentiale sein, d. h. es müssen die Gleichungen gelten:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)_0 + \int \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} dx_j.$$

Damit dies zutrifft, dürfen die folgenden Bedingungsgleichungen nicht verletzt werden:

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = 0, \quad 2 \frac{\partial^2 e_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right) = 0.$$

Das sind die Kompatibilitätsbedingungen.

Nun genügen aber weder die Anfangsverformungen noch die Spannungen diesen Gleichungen. Die Kirchhoffschen Verzerrungskomponenten aus dem unverformten Anfangszustand und die ihnen zugeordneten gedachten Spannungen genügen ihnen.

Damit hat man aber, wie wir weiter unten an einem Beispiel zeigen, im Falle des zweidimensionalen Elastizitätsproblems eine definierte Randwertaufgabe vor sich, sofern die Anfangsverformungen bekannt sind.

Man hat, um das einzusehen, nur die Gleichungen

$$e_{ij} = \frac{1}{2G} \left\{ 2\sigma_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} - \left( \sigma_{ij} + \frac{s}{m+1} \right) \delta_{ij} \right\}$$

in die Kompatibilitätsbedingungen einzusetzen und erhält, da die  $e_{ij}$  diesen genügen, u. a. die folgenden Gleichungen:

$$\frac{1}{2G} \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \frac{1}{m+1} \left( \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{1}{G} \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y} - \frac{1}{m+1} \frac{\partial^2 s}{\partial y \partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right) \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right).$$

Man erhält also ein System von sechs unabhängigen Differentialgleichungen, welche die gesuchten Spannungen in Beziehung setzen zu den bekannten Anfangsdeformationen oder auch umgekehrt, bei bekannten Eigenspannungen Relationen bilden mit den gesuchten verursachenden Deformationen. In dieser Allgemeinheit wird das Problem der Auffindung der Spannungen aus den Anfangsbedingungen, von Sonderfällen abgesehen, wenig Lösungsaussichten haben. Man wird sich daher, um ein Urteil über den physikalischen Sachverhalt zu gewinnen, auf durchsichtige ebene Probleme beschränken.

### Das zweidimensionale Selbstspannungsproblem

Wir betrachten nunmehr zur konkreten Durchführung einer Frage aus dem Gebiete der Eigenspannungen einen Körper von kreiszylindrischem Querschnitt, dessen Länge im Ver-

gleich zu seinem Durchmesser groß ist. Die Zylinderachse machen wir zur  $z$ -Achse des einzuführenden Koordinatensystems.

Die Temperaturverteilung, der wir uns den Körper ausgesetzt denken, sei nur von den Polarkoordinaten  $r$  und  $\varphi$  des Querschnittes abhängig.

Wenn der Körper ungleichmäßig erwärmt wird, ist er in seiner freien Ausdehnungsmöglichkeit behindert. Es werden auf diese Weise in ihm Spannungen auftreten, ohne daß äußere Spannungen dabei mitwirken.

Nach den Voraussetzungen über die Temperaturverteilung hängt diese von  $z$  nicht ab. Damit sind auch die durch die ungleichförmige Temperaturverteilung wachgerufenen Spannungen mit Ausnahme derjenigen in der Umgebung der Stirnfläche des Zylinders unabhängig von ihrer Lage in der  $z$ -Richtung.

Das wird bedeuten, daß die Zylinderquerschnitte in sich eben bleiben müssen. Verformungen dieses Charakters nennt man ebene Verzerrungszustände. Aus Symmetriegründen verschwinden hierbei die Schubspannungen  $\tau_{xz}$  und  $\tau_{yz}$ . Außerdem wollen wir die Massenkkräfte, da sie den Selbstspannungen einfach überlagert werden können, nicht ansetzen.

Damit schreiben sich die Gleichgewichtsbedingungen mit  $\gamma_{yz} = 0$ ,  $\gamma_{zx} = 0$  und  $e_z = \text{const.}$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad i, j = 1, 2,$$

wenn hinzukommend beachtet wird, daß keine der Größen von  $z$  abhängt.

Bei Spannungsfreiheit der Oberfläche lauten die zugehörigen Randbedingungen:

$$\sigma_{ij} \cos(n, x_j) = 0 \quad i, j = 1, 2.$$

Die sechs Verzerrungskomponenten sind voraussetzungsgemäß ebenfalls unabhängig von  $z$ . Da zudem  $\tau_{zx} = 0$ ,  $\tau_{xz} = 0$  und  $e_z = \text{const.}$ , bleibt nur die eine Kompatibilitätsbedingung

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

übrig. Nun gilt

$$e_z = \frac{1}{2G} \left\{ 2\sigma_z + \left( 2G\alpha T - \sigma_z - \frac{s}{m+1} \right) \right\}$$

oder

$$\sigma_z = E(e_z - \alpha T) - \frac{1}{m}(\sigma_x + \sigma_y)$$

und dann

$$e_{ij} = \frac{1}{2G} \left\{ 2\sigma_{ij} + \left( 2G\alpha T - \sigma_{ij} - \frac{s}{m+1} \right) \delta_{ij} \right\},$$

denn eine reine Dichteänderung, wie es die Wärmeausdehnung ist, verursacht wenigstens primär keine Winkeländerungen der Volumelemente.

Mit dem Ausdruck

$$\sigma_z = E(e_z - \alpha T) - \frac{1}{m}(\sigma_x - \sigma_z)$$

können die Verzerrungen auch folgendermaßen geschrieben werden ( $s = \sigma_{ii}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ):

$$e_{ij} = \frac{1}{2G} \left\{ 2\sigma_{ij} - \left( \sigma_{ij} + \frac{s - \sigma_z}{m} \right) \delta_{ij} \right\} - \left( \frac{e_z}{m} - \frac{m+1}{m} \alpha T \right) \delta_{ij}.$$

Setzt man diese drei Verzerrungsgrößen in die Kompatibilitätsgleichung ein, so erhält man die folgende partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{Em\alpha}{m-1} \nabla^2 T = 0.$$

Nun befriedigt nach A i r y der folgende Ansatz:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

die Gleichgewichtsdivergenzen. Setzt man diese Ausdrücke in die Differentialgleichung der Spannungen ein, so erhält man die folgende inhomogene Bipotentialgleichung für  $F$

$$\nabla^4 F + \frac{Em\alpha}{m-1} \nabla^2 T = 0.$$

Wenn demnach  $\nabla^2 T$  von Null verschieden ist,  $T$  also einer P o i s s o n schen Differentialgleichung genügt, ist es möglich, diese Bipotentialgleichung im Verein mit der Bedingung verschwindender Spannungen auf dem Kreisrande als ein Randwertproblem der Bipotentialtheorie zu erledigen. Die obige Differentialgleichung ist dem System zweier Differentialgleichungen äquivalent:

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{E m \alpha}{m-1} T \quad \text{und} \quad \nabla^4 V^* = 0$$

mit der Bedingung verschwindender Spannungen auf dem Rande.

Setzt man eine stetige Verteilung der Temperatur voraus, so lassen sich die zwei Funktionen  $W^* = -\Phi$  und  $V^*$  aus den beiden Differentialgleichungen

$$\nabla^2 W^* = \frac{E m \alpha}{m-1} T \quad \text{und} \quad \nabla^4 V^* = 0$$

bestimmen. Dabei errechnet man zuerst aus der P o i s s o n schen Gleichung  $W^*$ , um dann die Randbedingungen zur Bestimmung von  $V$  zu erhalten. Es genügt dabei, wenn man nur ein partikuläres Integral der Gleichung

$$\nabla^2 W^* = \frac{E m \alpha}{m-1} T$$

kennt, da die Integrale der homogenen Gleichung sämtlich in der homogenen Bipotentialgleichung enthalten sind. Die Spannungen selbst stellen sich in den  $V$  und  $W$  wegen  $F < V - W$  als der Spannungsfunktion in folgender Weise dar:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}.$$

Hat man ein partikuläres Integral der inhomogenen P o i s s o n schen Differentialgleichung gefunden, so ist die Funktion  $V$  durch Bestimmung der Lösung von  $\nabla^4 V = 0$  mit den Randwerten

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{d}{ds} \frac{\partial W}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{d}{ds} \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{d}{ds} \frac{\partial W}{\partial y}$$

zu bestimmen.

Setzt man voraus, daß die Ableitungen auf dem Rande eindeutig sind und sich stetig ändern, so läßt sich mit Hilfe der stetigen Temperaturverteilung  $T$  eine solche Funktion finden [5].

Dabei wurden bisher vorwiegend unendlich lange zylindrische Körper mit Kreisquerschnitt betrachtet. Für Sonderfälle stetiger Temperaturverteilungen wurde die Frage auch bei Hohlzylindern beantwortet. Bei einfach berandeten Bereichen, die durch Polynome die konforme Abbildung des Einheitskreises auf sich gestatten, kann das Eigenspannungsproblem gleichfalls für den langen Zylinder gelöst werden.

Ferner gelingt es dann, die Frage nach den Eigenspannungen in zusammengesetzten Körpern aufzugreifen und für den Kreisquerschnitt bei konzentrischer Anordnung zu beantworten [6].

Gibt man die Stetigkeit der Temperaturverteilungsfunktion auf, indem man sie stückweise stetig oder stückweise konstant annimmt, so hat die so gebildete Funktion keinen definierten Gradienten an den Sprungstellen mehr.

Die Lösung der Bipotentialgleichung ist dann aus den Werten zu suchen, die das partikuläre Integral der inhomogenen Differentialgleichung elliptische Typs und seine erste Ableitung auf dem Rande annehmen. Diese erste Ableitung ist nun aber keine differenzierbare Funktion.

Die zu erwartenden Lösungen dieses Randwertproblems werden demnach Diskontinuitäten in den zweiten Ableitungen haben. Die Frage ist nun, ob es solche Lösungen des Problems gibt, deren Unstetigkeiten mit der Differentialgleichung vereinbar sind, beziehungsweise ob durch geeignete Festsetzungen über die A i r y s c h e Funktion verträgliche Ergebnisse liefernde Lösung gewonnen werden können. Nachdem man einheitliche konstante Größen für das Elastizitätsverhalten und die Wärmeausdehnung festgesetzt hat, soll also auch die für stetige Dichteänderungen als Folge ungleichmäßiger Temperaturverteilung aufgestellte Differentialgleichung bestehen bleiben.

Die aus der Lösung dieser Differentialgleichung durch zweimalige partielle Differentiation zu gewinnenden Spannungen müssen so beschaffen sein, daß die Normalspannungen in Richtung der Normalen der Unstetigkeitsfläche und die Schubspannungen die Diskontinuitätsfläche stetig durchsetzen. Eine Unstetigkeit dürfen nur die in der Tangentialebene dieser Fläche liegenden Normalspannungen beim Durchsetzen derselben erfahren.

Die Diskontinuität braucht bei diesem Ansatz nicht allein durch die Temperatur hervorgerufen zu werden. Sie kann auch erzeugt sein dadurch, daß in verschiedenen Teilen eines Körpers verschiedene Elastizitätsmoduln oder Wärmeausdehnungskoeffizienten vorhanden sind.

Denkt man sich als Ursache der sprunghaften Dichteänderung einen ebensolchen Temperaturunterschied hervorgerufen durch eine in ihren Stetigkeitsbereichen konstante Funktion, so wird man diese selbst kaum einer Differentialgleichung der stationären Temperaturströmung zuordnen können.

Man wird sie vielmehr definieren müssen und sie dann der inhomogenen elliptischen Differentialgleichung in der Form

$$\frac{E m \alpha T}{m - 1}$$

als Belegungsfunktion beigegeben.

Die Lösungen des simultanen Gleichungssystems mit einer diskontinuierlichen Störungsfunktion für die P o i s s o n sche Differentialgleichung ist in geschlossener Form nach einer auf C a u c h y zurückgehenden Form möglich [7].

Es wird sich danach ergeben, daß mit Ausnahme einiger singulärer Randlinien, an denen partielle zweite Differentialquotienten überhaupt nicht definiert sind, die Differenzierbarkeit auf der Sprungfläche in der Art aufhört, daß endliche Sprünge auftreten.

### Das ebene Eigenspannungsproblem bei unstetiger Dichteänderung

Mit den oben gemachten Voraussetzungen und Einschränkungen gehen wir also von der Spannungsfunktion

$$F = V^* - W^* = \frac{E m \alpha T}{m - 1} (V - W).$$

aus.

Im konkreten Fall sei nun die Dichteänderung als die folgende unstetige Funktion vorgelegt. Innerhalb eines konzentrischen Kreissektors betrage die Temperaturerhöhung  $T^0$ , während sie im übrigen Teile des Kreises den Wert Null haben möge. In dieser Form ist das Problem der Bestimmung der zugehörigen Spannungsfunktion der Berechnung der Durchbiegung der allseitig eingespannten Kreisplatte mit unstetiger Lastverteilung sehr ähnlich.

H a r r y S c h m i d t hat für den Fall unstetiger Lastverteilungen auf der längs ihres Umfangs eingespannten Kreisplatte ein Integrationsverfahren angewandt, das für die verschiedensten Arten unstetiger Lastverteilung seine außerordentliche Kraft erwiesen hat. Es ist von ihm selbst und seinen Mitarbeitern [7] wiederholt mit Erfolg angewendet worden.

Um dieses Integrationsverfahren auf das obige Eigenspannungsproblem anwenden zu können, transformieren wir die P o i s s o n sche Differentialgleichung und auch die homogene Gleichung vierter Ordnung sachgemäß erst auf Polarkoordinaten und erhalten, wenn wir festsetzen

$$0 \leq r \leq r_0, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi_0 \leq \pi,$$

die folgenden partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} = T$$

und

$$\Delta \Delta V(r, \varphi) = 0 \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Dazu kommen nach Ermittlung eines partikulären Integrales der inhomogenen Differentialgleichung für  $W$  und  $V$  die Randbedingungen

$$V(r_0, \varphi) = W(r_0, \varphi) \quad \text{und} \quad \left( \frac{\partial V(r, \varphi)}{\partial r} \right)_{r=r_0} = \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)_{r=r_0}.$$

Die Temperaturverteilung hängt nur ab von  $\varphi$ . Sie ist folgendermaßen definiert:

$$T(r, \varphi) = T(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \leq \varphi < -\varphi_0 \\ 1 & \text{für } -\varphi_0 \leq \varphi < +\varphi_0 \\ 0 & \text{für } \varphi_0 < \varphi < +\pi. \end{cases}$$

Dafür kann mit Hilfe der D i r i c h l e t s c h e n diskontinuierlichen Funktion der Ansatz gemacht werden:

$$T(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{(\mathbb{G})} \frac{e^{(\varphi + \varphi_0)z}}{z} dz - \int_{(\mathbb{G})} \frac{e^{(\varphi - \varphi_0)z}}{z} dz \right\}.$$

Das Integral ist dabei längs einer Parallelen zur imaginären Achse in positiver Richtung zu erstrecken. Ändert sich  $\varphi$  im Intervall  $-\pi, +\pi$ , so springt das erste Integral der Klammer an der Stelle  $\varphi = -\varphi_0$  vom Werte Null auf  $T^0$ , um von da an konstant zu bleiben. Das zweite Integral macht den gleichen Sprung an der Stelle  $\varphi = \varphi_0$ , so daß von  $\varphi = \varphi_0$  bis  $\varphi = \pi$  die Funktion  $T(\varphi)$  wieder verschwindet.

Wegen der Gültigkeit des Superpositionsprinzips genügt es zunächst, ein partikuläres Integral der P o i s s o n'schen Differentialgleichung

$$\Delta W(r, \varphi) = e^{\varphi z}$$

zu kennen.

Ein solches Integral läßt sich angeben, es lautet

$$W = r^2 \frac{e^{\varphi z}}{(z + 2i)(z - 2i)}.$$

Zur Herstellung der Lösung des Problems ist hierzu diejenige Lösung der homogenen Gleichung vierter Ordnung  $\Delta \Delta V = 0$  zu überlagern, die den Bedingungen

$$\{V(r, \varphi, z)\}_{r=r_0} = \{W(r, \varphi, z)\}_{r=r_0} = r_0^2 \frac{e^{\varphi z}}{(z + 2i)(z - 2i)} = g(\varphi, z)$$

und

$$\left\{ \frac{\partial V}{\partial r} \right\}_{r=r_0} = \left\{ \frac{\partial W}{\partial r} \right\}_{r=r_0} = 2 r_0 \frac{e^{\varphi z}}{(z + 2i)(z - 2i)} = h(\varphi, z)$$

genügt.

Dieses Randwertproblem hat für den Kreis die Lösung [8]

$$V(r, \varphi, z) = \frac{1}{2\pi r_0} (r^2 - r_0^2) \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{-h d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos(\alpha - \varphi)} + \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{g \{r_0 - r \cos(\alpha - \varphi)\} d\alpha}{\{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos(\alpha - \varphi)\}^2} \right\}.$$

Der Ausdruck kann für unsere Zwecke umgeformt werden und lautet

$$V(r, \varphi, z) = -\frac{(r_0^2 - r^2)^2}{4\pi r_0} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{h d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos(\alpha - \varphi)} + \frac{(r_0^2 - r^2)^2}{4\pi r_0^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{g d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos(\alpha - \varphi)} + \frac{(r_0^2 - r^2)^3}{4\pi r^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{g d\alpha}{\{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos(\alpha - \varphi)\}^2}.$$

Setzt man schließlich

$$F(r, \varphi) = \frac{Em\alpha T}{m-1} f(r, \varphi),$$

so ist durch

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{(\mathbb{G})} \frac{e^{\varphi_0 z}}{z} \{V(r, \varphi, z) - W(r, \varphi, z)\} dz - \int_{(\mathbb{G})} \frac{e^{-\varphi_0 z}}{z} \{V(r, \varphi, z) - W(r, \varphi, z)\} dz \right\}$$

die Lösung der inhomogenen Bipotentialgleichung gegeben. Die Quadratur muß zuerst über den Anteil des Integranden erfolgen, der vom partikulären Integral der inhomogenen partiellen elliptischen Differentialgleichung herrührt. Denn dieser Teil bestimmt die Randwerte für die Lösung der homogenen Bipotentialgleichung im Falle des Kreises nach der oben stehenden P o i s s o n'schen Formel.

Die angekündigte Integration liefert

$$\frac{r^2}{2\pi i} \int_{(\mathbb{G})} \frac{e^{(\varphi \pm \varphi_0)z} dz}{z(z + 2i)(z - 2i)} = \begin{cases} \frac{r^2}{4} \{1 - \cos(2(\varphi \pm \varphi_0))\} & \text{für } \varphi > \mp \varphi_0 \\ 0 & \text{für } \varphi \leq \mp \varphi_0. \end{cases}$$

Bei der Bestimmung eines partikulären Integrals der elliptischen inhomogenen Differentialgleichung gibt es keine Schwierigkeiten. Anders ist es bei der homogenen Bipotentialgleichung.

Die Randwerte des zu ihrer Bestimmung dienenden Integrals erfüllen nicht die Bedingungen viermaliger Differenzierbarkeit auf dem Rande. Diese ist aber Voraussetzung für die Existenz einer regulären Lösung der Bipotentialgleichung. Die Funktion  $g$  ist nur einmal und nicht viermal dort stetig differenzierbar und daher gibt es keine reguläre Lösung für das Randwertproblem. Damit gibt es keine Möglichkeit, die Einzigkeit der Lösung nachzuweisen.

Weder  $\Delta f$  noch  $\frac{\partial \Delta f}{\partial r}$  sind bis in den Rand hinein stetig. Nun zeigt man bei regulären Lösungen die Eindeutigkeit auf folgende Weise. Man geht von der G r e e n'schen Formel aus, indem man in ihr die Funktion  $u$  durch  $\Delta u$  ersetzt und hat dann

$$\int_{(K)} (\Delta u \Delta v - v \Delta \Delta u) d\sigma = \int \left( \Delta u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial \Delta u}{\partial r} \right) ds$$

für den Kreis und den Rand.

Setzt man die gleichfalls reguläre Differenz  $U$  zweier regulärer Lösungen dieses Problems in die obige Formel ein, nachdem man noch  $u = v = U$  gemacht hat, so ergibt sich mit den Randbedingungen

$$U = \frac{\partial U}{\partial r} = 0$$

sofort die Gleichung

$$\int (\Delta U)^2 d\sigma = 0.$$

Wegen der Regularität von  $\Delta U$  folgt daraus  $\Delta U = 0$ .

Da auf dem Rande  $U = 0$  besteht, muß die Funktion  $U$  identisch null sein. Nun ist unsere Lösung nicht regulär, also läßt sich der Eindeutigkeitsbeweis nicht führen. Die gewonnene Lösung ist also nicht die einzig mögliche. Nach dieser Zwischenbemerkung möge nun die Quadratur fortgeführt werden.

Die anderen Quadraturen werden so vorgenommen, daß man die Reihenfolge der aufeinander folgenden Integrationen vertauscht. Nach Ausführung der Integration nach  $z$  sind dann noch die folgenden Integrale zu berechnen:

$$\int_{-\varphi_0}^{\pi} \frac{\cos \{n(\alpha + \varphi_0)\} d\alpha}{\{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\alpha - \varphi)\}^k} \quad \text{und} \quad \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{\cos \{n(\alpha - \varphi_0)\} d\alpha}{\{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\alpha - \varphi)\}^k}$$

$k = 1, 2; n = 0, 2.$

Die unteren Integrationsgrenzen sind dadurch festgelegt, daß die Integranden jeweils für  $-\pi \leq \alpha \leq -\varphi_0$  oder  $-\pi \leq \alpha \leq \varphi_0$  verschwinden.

Die Berechnung dieser Integrale ist sowohl im Komplexen als auch im reellen Gebiet in geschlossener Form möglich.

Für das Reelle sei die Auswertung an dem Integral

$$\int_{-\varphi_0}^{\pi} \frac{d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\alpha - \varphi)}$$

vorgeführt.

Zu dem Zweck setzen wir

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \varphi) &= \frac{w^2 - 1}{w^2 + 1}; & \sin(\alpha - \varphi) &= \frac{2w}{w^2 + 1}; \\ \cotg \frac{\alpha - \varphi}{2} &= w; & d\alpha &= -\frac{2dw}{w^2 + 1}. \end{aligned}$$

Damit erhält man für das unbestimmte Integral

$$\begin{aligned} \int \frac{d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\alpha - \varphi)} &= -\frac{2}{(r + r_0)^2} \int \frac{dw}{1 + \left(\frac{r - r_0}{r + r_0}\right)^2 w^2} \\ &\quad - \frac{2}{r_0^2 - r^2} \arctg \left( \frac{r_0 - r}{r_0 + r} \cotg \frac{\alpha - \varphi}{2} \right). \end{aligned}$$

Das bestimmte Integral erhält somit den Wert:

$$\frac{2}{r_0^2 - r^2} \left[ \operatorname{arctg} \left\{ \frac{r_0 - r}{r_0 + r} \cotg \frac{\varphi + \pi}{2} \right\} - \operatorname{arctg} \left\{ \frac{r_0 - r}{r_0 + r} \cotg \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \right\} + \mathfrak{C} \right].$$

Die Größe  $\mathfrak{C}$  ist hierin folgendermaßen definiert

$$\mathfrak{C} = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi < \varphi < -\varphi_0 \\ -\pi & \text{für } -\varphi_0 < \varphi < \pi. \end{cases}$$

Neben dem reellen Integrationsverfahren wurde abwechselnd auch die Integration im Komplexen herangezogen, wofür gleichfalls noch ein Beispiel gegeben werde. Zu dem Zweck nehmen wir das Integral

$$\int_{-\varphi_0}^{\pi} \frac{d\alpha}{\{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos(\alpha - \varphi)\}^2} = \frac{1}{4 r^2 r_0^2} \int_{-(\varphi + \varphi_0)}^{\pi - \varphi} \frac{d\psi}{\left\{ -\frac{r_0^2 + r^2}{2 r r_0} + \cos \psi \right\}^2}$$

Setzen wir

$$z = e^{i\psi}, \quad z_1 = \frac{r}{r_0}, \quad z_2 = \frac{r_0}{r},$$

so kann dieses Integral als Realteil von

$$-\frac{i}{r_0^2 r^2} \int_{e^{-i(\varphi + \varphi_0)}}^{e^{i(\pi - \varphi)}} \frac{z dz}{\{(z - z_1)(z - z_2)\}^2}$$

aufgefaßt werden.

Durch Partialbruchzerlegung erhält man daraus

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{r^2 r_0^2} \int_{e^{i(\varphi - \varphi_0)}}^{e^{i(\pi - \varphi)}} \left[ \frac{z_1(z_1 - z_2)}{(z - z_1)^2} - \frac{z_1 + z_2}{z - z_1} + \frac{z_2(z_1 - z_2)}{(z - z_2)^2} + \frac{z_1 + z_2}{z - z_2} \right] \frac{dz}{(z_1 - z_2)^3} \\ & = \frac{-i}{\{r^2 - r_0^2\}^3} \int_{e^{i(\varphi - \varphi_0)}}^{e^{i(\pi - \varphi)}} \left[ \frac{z_1(z_1 - z_2)}{(z - z_1)^2} - \frac{z_1 + z_2}{z - z_1} + \frac{z_2(z_1 - z_2)}{(z - z_2)^2} + \frac{z_1 + z_2}{z - z_2} \right] dz. \end{aligned}$$

Daraus folgen nacheinander

$$\begin{aligned} & \int_{e^{-i(\varphi + \varphi_0)}}^{e^{i(\pi - \varphi)}} \frac{dz}{(z - z_1)^2} - \frac{1}{z - z_1} \Big|_{e^{-i(\varphi + \varphi_0)}}^{e^{i(\pi - \varphi)}} = \frac{1}{e^{-i(\varphi - \varphi_0)} - z_1} - \frac{1}{e^{i(\pi - \varphi)} - z_1} \\ & = \frac{r^2 \cos(\varphi - \varphi_0) - r_0 r + i r_0^2 \sin(\varphi + \varphi_0)}{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos(\varphi + \varphi_0)} - \frac{r_0^2 \cos \varphi + r_0 r + i r_0^2 \sin \varphi}{r^2 + r_0^2 + 2 r r_0 \cos \varphi}, \end{aligned}$$

damit

$$\begin{aligned} & \Re \left\{ \frac{-i z_1(z_1 - z_2)}{(r^2 - r_0^2)^3} \int_{e^{-i(\varphi - \varphi_0)}}^{e^{i(\pi - \varphi)}} \frac{dz}{(z - z_1)^2} \right\} \\ & = \frac{1}{(r^2 - r_0^2)^3} \left\{ \frac{r r_0 \sin(\varphi + \varphi_0)}{r^2 + r^2 - 2 r r_0 \cos(\varphi + \varphi_0)} - \frac{r r_0^2 \sin \varphi}{r^2 + r_0^2 + 2 r r_0 \cos \varphi} \right\}. \end{aligned}$$

Das Integral

$$\int_{-\varphi_0}^{\pi} \frac{d\alpha}{\{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos(\alpha - \varphi)\}^2}$$

läßt sich mit diesen Ergebnissen in der folgenden Form schreiben

$$\begin{aligned} & \frac{2}{(r^2 - r_0^2)^3} \left\{ \frac{r r_0 \sin(\varphi + \pi)}{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos(\varphi + \pi)} + \frac{r r_0 \sin \varphi}{r^2 + r_0^2 + 2 r r_0 \cos \varphi} \right\} \\ & + \frac{2(r_0^2 + r^2)}{(r^2 - r_0^2)^3} \left\{ \operatorname{arctg} \left( \frac{r_0 \sin(\varphi + \pi)}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos(\varphi + \pi)} - \{r - r_0 \cos(\varphi + \pi)\}} \right) + c \right. \\ & \quad \left. - \operatorname{arctg} \left( \frac{r_0 \sin(\varphi + \varphi_0)}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos(\varphi + \varphi_0)} - \{r - r_0 \cos(\varphi + \varphi_0)\}} \right) \right\} \\ & - \frac{2(r_0^2 + r^2)}{(r^2 - r_0^2)^3} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{r \sin(\varphi + \pi)}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos(\varphi + \pi)} - \{r_0 - r \cos(\varphi + \pi)\}} + c \right. \\ & \quad \left. - \operatorname{arctg} \frac{r \sin(\varphi + \varphi_0)}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos(\varphi + \varphi_0)} - \{r_0 - r \cos(\varphi + \varphi_0)\}} \right\}. \end{aligned}$$

Die Arcustangensfunktionen lassen sich zusammenfassen nach den für diese geltenden Additionstheoremen. Danach ergibt sich

$$\begin{aligned} & \operatorname{arctg} \left( \frac{r \sin(\varphi + \varphi_0)}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos(\varphi + \varphi_0)} - \{r_0 - r \cos(\varphi + \varphi_0)\}} \right) \\ & - \operatorname{arctg} \left( \frac{r_0 \sin(\varphi + \varphi_0)}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos(\varphi + \varphi_0)} - \{r - r_0 \cos(\varphi + \varphi_0)\}} \right) \\ & = - \operatorname{arctg} \left\{ \frac{r - r_0}{r + r_0} \operatorname{ctg} \left( \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \right) \right\} = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{r_0 - r}{r_0 + r} \operatorname{ctg} \left( \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Das obige Integral erhält damit den Wert

$$\begin{aligned} & \frac{2}{(r^2 - r_0^2)^3} \left\{ \frac{r r_0 \sin(\varphi + \varphi_0)}{r_0^2 + r^2 - 2 r r_0 \cos(\varphi + \varphi_0)} + \frac{r r_0 \sin \varphi}{r^2 + r_0^2 + 2 r r_0 \cos \varphi} \right\} \\ & + \frac{2(r^2 + r_0^2)}{(r^2 - r_0^2)^3} \left[ \operatorname{arctg} \left\{ \frac{r_0 - r}{r_0 + r} \operatorname{ctg} \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \right\} - \operatorname{arctg} \left\{ \frac{r_0 - r}{r_0 + r} \operatorname{ctg} \frac{\varphi + \pi}{2} \right\} \right] \\ & + \frac{2(r^2 + r_0^2)}{(r^2 - r_0^2)^2} \mathfrak{E}. \end{aligned}$$

Dabei ist  $\mathfrak{E}$

$$\mathfrak{E} = \begin{cases} -\pi & \text{für } -\varphi_0 < \varphi < \pi \\ 0 & \text{für } -\pi < \varphi < -\varphi_0. \end{cases}$$

Weiter erhält man auf ähnliche Weise

$$\begin{aligned} & \Re \left\{ \frac{-i r r_0 z_2 (z_1 - z_2)}{(r^2 - r_0^2)^3} \int_{e^{i(\varphi + \varphi_0)}}^{e^{i(\pi - \varphi)}} \frac{dz}{(z - z_2)^2} \right\} \\ & = \frac{1}{(r^2 - r_0^2)^2} \left\{ \frac{r r_0 \sin(\varphi + \varphi_0)}{r_0^2 + r^2 - 2 r r_0 \cos(\varphi + \varphi_0)} - \frac{r r_0 \sin \varphi}{r^2 + r_0^2 + 2 r r_0 \cos \varphi} \right\}, \end{aligned}$$

dann erhalten wir noch die beiden Integrale

$$\begin{aligned} & \Re \left\{ \frac{i r r_0 (z_1 + z_2)}{(r^2 - r_0^2)^3} \int_{e^{-i(\varphi + \varphi_0)}}^{e^{i(\pi - \varphi)}} \frac{dz}{z - z_1} \right\} \\ & = \frac{2(r_0^2 + r^2)}{(r^2 - r_0^2)^3} \left\{ \operatorname{arctg} \left( \frac{r_0 \sin(\varphi + \pi)}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos(\varphi + \pi)} - \{r - r_0 \cos(\varphi + \pi)\}} \right) \right. \\ & \quad \left. - \operatorname{arctg} \left( \frac{r_0 \sin(\varphi + \varphi_0)}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos(\varphi + \varphi_0)} - \{r - r_0 \cos(\varphi + \varphi_0)\}} \right) + c \right\} \end{aligned}$$

und

$$\Re \left\{ \frac{-i r_0 r (z_1 - z_2)}{(r^2 - r_0^2)^3} \int_{e^{-i(\varphi + \varphi_0)}}^{e^{i(\pi - \varphi)}} \frac{dz}{z - z_2} \right\} \\ = \frac{-2(r_0^2 + r^2)}{(r^2 - r_0^2)^3} \left\{ \operatorname{arctg} \left( \frac{r \sin(\varphi + \pi)}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos(\varphi + \pi)} - \{r_0 - r \cos(\varphi + \pi)\}} \right) \right. \\ \left. - \operatorname{arctg} \left( \frac{r \sin(\varphi + \varphi_0)}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos(\varphi + \varphi_0)} - \{r_0 - r \cos(\varphi + \varphi_0)\}} \right) + c \right\}.$$

Der Integrationsweg ist längs des Einheitskreises in der  $z$ -Ebene zu erstrecken. Um die auftretenden Funktionen in dieser Ebene eindeutig zu erklären, ist diese von  $z_2 = \frac{r_0}{r}$  über  $z_1 = \frac{r}{r_0}$  längs der negativ reellen Achse aufgeschlitzt. Der Wert der Größen  $c$  und  $c$  hängt davon ab, wie oft der Integrationsweg den Schnitt überschreitet. Der Wert der Arcustangensfunktion ist durch den veränderlichen Winkel bestimmt und ändert sich zwischen  $-\frac{\pi}{2}$  und  $+\frac{\pi}{2}$ . Die Werte der Größen  $c$  und  $c$  seien in Abhängigkeit von  $\varphi$  in der folgenden Tabelle gegeben

$$c = \begin{cases} \pi & \text{für } -\pi < \varphi < 0 \\ 0 & \text{für } 0 < \varphi < \pi - \varphi_0 \\ \pi & \text{für } \pi - \varphi_0 < \varphi < \pi \end{cases} \quad c = \begin{cases} \pi & \text{für } -\pi < \varphi < -\varphi_0 \\ 0 & \text{für } -\varphi_0 < \varphi < 0 \\ -\pi & \text{für } 0 < \varphi < \pi - \varphi_0 \\ 0 & \text{für } \pi - \varphi_0 < \varphi < \pi \end{cases}$$

Schlitz von  $\frac{r}{r_0}$  nach  $-\infty$ .

Schlitz von  $\frac{r_0}{r}$  nach  $-\infty$ .

Alle auftretenden Integrale können nun auf die eine oder andere Art ausgerechnet werden, so daß man die gesuchte Spannungsfunktion in der folgenden Form erhält; mit den Erklärungen für den Arcustangens:

$$F(r, \varphi) = \frac{E m \alpha}{m - 1} T f(r, \varphi),$$

dabei ist

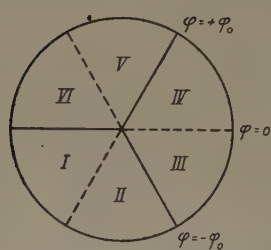


Bild. 1.  
Einteilung des Integrationsgebietes

$$f(r, \varphi) = f \quad \text{im Sektor I u. II} \\ = f - \frac{r^2}{4} \{1 - \cos 2(\varphi + \varphi_0)\} \quad \text{im Sektor III u. IV} \\ + \frac{1}{16\pi} \left\{ 4r^2 + \frac{2(r_0^2 - r^2)^2 - 4r^4}{r^2} \cos 2(\varphi + \varphi_0) \right\} \pi \\ = f \quad \text{im Sektor V u. VI} \\ - \frac{r^2}{4} (1 - \cos 2(\varphi + \varphi_0)) + \frac{r^2}{4} (1 - \cos 2(\varphi - \varphi_0)) \\ + \frac{1}{16\pi} \left\{ 4r^2 + \frac{2(r_0^2 - r^2)^2 - 4r^4}{r^2} \cos 2(\varphi + \varphi_0) \right\} \pi \\ - \frac{1}{16\pi} \left\{ 4r^2 + \frac{2(r_0^2 - r^2)^2 - 4r^4}{r^2} \cos 2(\varphi - \varphi_0) \right\} \pi.$$

Darin ist  $f$  eine Funktion, die im Anhang dargestellt ist. Die Art der Einteilung des Kreisquerschnittes lehnt sich an die hergebrachte [7] an und geht aus dem Bild eindeutig hervor. Die Spannungen ergeben sich aus der Spannungsfunktion durch Differenzieren. Man erhält:

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \tau = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right).$$

Der durch  $f$  dargestellte Teil der Lösung wird im Punkte  $r = 0$  sinnlos, und bei seiner Herleitung wurde diese Stelle dann ja auch ausgeschlossen. Wegen der fortgesetzten Division durch  $r$  wurde stillschweigend  $r \neq 0$  vorausgesetzt. Der Wert für  $f$  an der Stelle  $r = 0$  kann entweder

durch eine Grenzwertbetrachtung, ein Verfahren, dessen man sich im Hinblick auf die späteren Differentiationen nicht bedienen kann, oder aber auf dem Wege von Reihenentwicklungen der Integranden ermittelt werden, deren Konvergenz in der nahen Umgebung von  $r = 0$  gut ist.

Die betreffende Untersuchung wurde nicht gemacht, da außerhalb dieser Stelle der geschlossene Ausdruck zur Ermittlung der Spannungen zur Verfügung steht. Zunächst wurde durch entsprechende partielle Differentiation der Spannungsfunktion die Schubspannung bestimmt. Dafür erhält man wegen

$$F = \frac{E m \alpha T}{m-1} f \quad \text{und} \quad \tau = - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right)$$

unter Verwendung des im Anhang dargestellten Differentialquotienten  $-\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)$  den folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{E m \alpha T}{m-1} \left\{ - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \right\} && \text{in den Sektoren I u. II} \\ \tau &= \frac{E m \alpha T}{m-1} \left\{ - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \right. && \text{in den Sektoren III u. IV} \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sin 2(\varphi + \varphi_0) - \frac{1}{4} \frac{3r_0^4 - 2r_0^2 r^2 + r^4}{r^4} \sin 2(\varphi + \varphi_0) \right\} \\ \tau &= \frac{E m \alpha T}{m-1} \left\{ - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \right. && \text{in den Sektoren V u. VI} \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sin 2(\varphi + \varphi_0) - \frac{1}{2} \sin 2(\varphi - \varphi_0) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \frac{3r_0^4 - 2r_0^2 r^2 + r^4}{r^4} (\sin 2(\varphi + \varphi_0) - \sin 2(\varphi - \varphi_0)) \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man darin  $r = r_0$ , so verschwinden, wie verlangt, die Schubspannungen. In den Punkten  $r = r_0$ ,  $\varphi = -\varphi_0$ , und  $r = r_0$ ,  $\varphi = +\varphi_0$  ist die Funktion nicht definiert. An den Grenzflächen  $\varphi = -\varphi_0$  und  $\varphi = +\varphi_0$  verhält sich Schubspannung mit Ausnahmen stetig. Die Ausnahmestellen liegen für die hergestellten Funktionen auf den Erzeugenden des Zylinders durch die Randpunkte  $r_0$ ,  $-\varphi_0$  und  $r_0$ ,  $+\varphi_0$ . Die Verhältnisse auf der Achse  $r = 0$  können damit nicht beurteilt werden. Es würde die Untersuchung auf diese Punkte auch nicht weiter ausgedehnt.

Der für die Schubspannung  $\tau$  gefundene Ausdruck wurde auf sein Verhalten in den Stellen  $r_0$ ,  $-\varphi_0$  und  $r_0$ ,  $+\varphi_0$  untersucht. Dazu wurden in den Funktionen  $r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos(\varphi - \varphi_0)$  und  $r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos(\varphi + \varphi_0)$  abhängigen Gliedern diese beiden Argumente in der Umgebung der kritischen Punkte durch  $l$  ersetzt. Die anderen jeweils interessierenden Größen lassen sich dann durch  $l$  und einen Hilfswinkel  $\gamma$ , der durch die Beziehung:  $r^2 = r_0^2 + l^2 - 2r_0 l \cos \gamma$  definiert ist, darstellen. Es zeigt sich dann daraus, daß  $\tau$  auf den fraglichen Linien kein Wert entspricht, da die Grenzübergänge jeweils Werte erzeugen, die von der Richtung abhängen. Mit den genannten Ausnahmen läßt sich nun auch die Normalspannung  $\sigma_\varphi = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$  definieren. Die Werte für  $\partial^2 f / \partial r^2$  ersehe man im Anhang.

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi &= \frac{E m \alpha T}{m-1} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} && \text{im I. und II. Abschnitt} \\ \sigma_\varphi &= \frac{E m \alpha T}{m-1} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right. && \text{im III. und IV. Abschnitt} \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (1 - \cos 2(\varphi + \varphi_0)) + \frac{1}{16} \left( 8 - 4 \frac{r^4 - 3r_0^4}{r^4} (\cos 2(\varphi + \varphi_0)) \right) \right\} \\ \sigma_\varphi &= \frac{E m \alpha T}{m-1} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right. && \text{im V. und VI. Abschnitt} \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (1 - \cos 2(\varphi + \varphi_0)) + \frac{1}{2} (1 - \cos 2(\varphi - \varphi_0)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \left( 2 - \frac{r^4 - 3r_0^4}{r^4} \cos 2(\varphi + \varphi_0) \right) - \frac{1}{4} \left( 2 - \frac{r^4 - 3r_0^4}{r^4} \cos 2(\varphi - \varphi_0) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Die Normalspannung  $\sigma_r$  läßt sich mit den im Anhang aufgeführten Werten für  $\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$  und  $\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r}$  in folgender Weise darstellen:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E m \alpha T}{m-1} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right\} && \text{im I. und II. Abschnitt} \\ \sigma_r &= \frac{E m \alpha T}{m-1} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right. && \text{im III. und IV. Abschnitt} \\ &\quad - \cos 2(\varphi + \varphi_0) - \frac{1}{2} (1 - \cos 2(\varphi + \varphi_0)) \\ &\quad \left. - \frac{8(r_0^2 - r^2)^2 - 16r^4}{16r^4} \cos 2(\varphi + \varphi_0) + \frac{1}{16} \left( 8 - \frac{4(r_0^4 + r^4)}{r^4} \cos 2(\varphi + \varphi_0) \right) \right\} \\ \sigma_r &= \frac{E m \alpha T}{m-1} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right. && \text{im V. und VI. Abschnitt} \\ &\quad - \cos 2(\varphi + \varphi_0) + \cos 2(\varphi - \varphi_0) - \frac{1}{2} (1 - \cos 2(\varphi + \varphi_0)) + \frac{1}{2} (1 - \cos 2(\varphi - \varphi_0)) \\ &\quad - \frac{8(r_0^2 - r^2)^2 - 16r^4}{16r^4} (\cos 2(\varphi + \varphi_0) - \cos 2(\varphi - \varphi_0)) \\ &\quad \left. - \frac{r_0^4 + r^4}{4r^4} (\cos 2(\varphi + \varphi_0) - \cos 2(\varphi - \varphi_0)) \right\}. \end{aligned}$$

Diese Funktion ist im Nullpunkt nicht erklärt. Desgleichen nimmt sie auf den Erzeugenden des umschließenden Zylindermantels durch die Punkte  $r_0, -\varphi_0$  und  $r_0, +\varphi_0$  keinen Wert an. Damit ist für die innere Umgebung der Zylinderfläche mit den genannten Ausnahmen für diese selbst die Aufgabe, die Eigenspannungen für die geschilderte unstetige Dichteverteilung aufzufinden, gelöst. Einschränkend wurde noch verlangt, daß die Dichteänderung bei endlicher Zylinderlänge nur in Richtungen senkrecht zur Achse des Zylinders stattfindet. Ein Einzigkeitsbeweis läßt sich nicht führen, da die Funktion nicht mehr als einmal differenzierbar ist Parallel zur Achse, also in  $z$ -Richtung, wirkt die Spannung

$$\sigma_z = E(e_z - \alpha T) + \frac{1}{m} (\sigma_r + \sigma_\varphi).$$

### Zusammenfassung

Die Herstellung der Ausdrücke für die Spannungen durch gehörige Differentiation der Lösung der Randwertaufgabe der Bipotentialgleichung, also der Airyschen Spannungsfunktion ergibt einen stetigen Durchgang der Normalspannung in Richtung der Flächennormale der Diskontinuitätsfläche durch diese Trennfläche. Die Schubspannung durchsetzt die Trennfläche gleichfalls ohne Sprung. Allein die Normalspannung parallel zur Tangentialebene zur Trennfläche erfährt eine Diskontinuität. Die Unterbrechung der Stetigkeit besteht in einem endlichen Sprung.

Dabei wurde das Verhalten der Spannungen im Nullpunkt nicht untersucht, da für diesen die Airysche Funktion nicht gesucht wurde.

Eine zweite Einschränkung ist zu machen bei den Punkten der zwei Mantellinien des Zylinders durch die Punkte  $r_0, -\varphi_0$  und  $r_0, +\varphi_0$ . Auf diesen Linien existieren für die Ableitungen keine Werte. Die Airysche Funktion wurde durch die Hauptwerte der Arcustangensfunktionen erklärt. Diese so definierte Funktion erfüllt somit die an sie zu stellenden Forderungen mit den genannten Ausnahmen. Sie kann daher als Lösung des

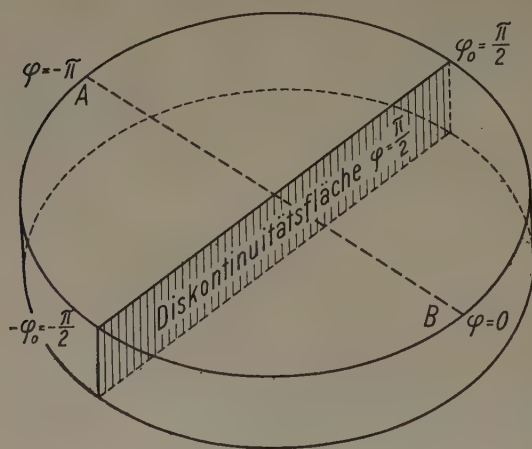


Bild 2. Scheibe aus dem unendlich langen Zylinder

Differentialgleichungssystems bei verschwindenden Randwerten gelten. Diese nichtreguläre Lösung ist also mit Ausnahme der Singularitäten auf den Erzeugenden die Antwort auf die Frage nach den Eigenspannungen des Wärmespannungsproblems. Läßt man die unstetige Temperaturverteilung dadurch in die gleichmäßige übergehen, daß man  $\varphi_0 = \pi$  wählt, so verschwindet der Spannungszustand, wie es sein muß.

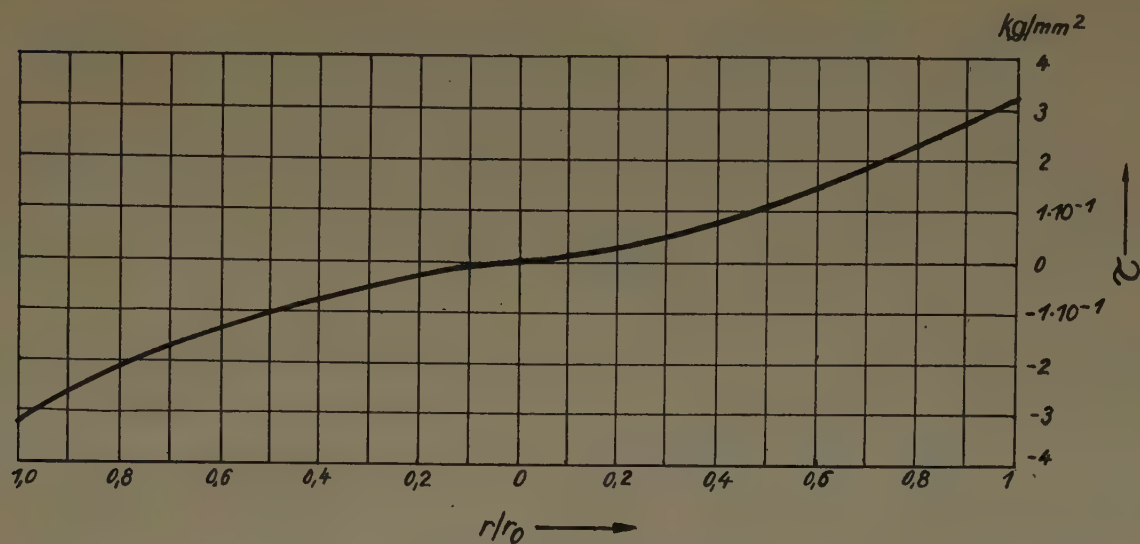


Bild 3. Schubspannung in der Trennfläche

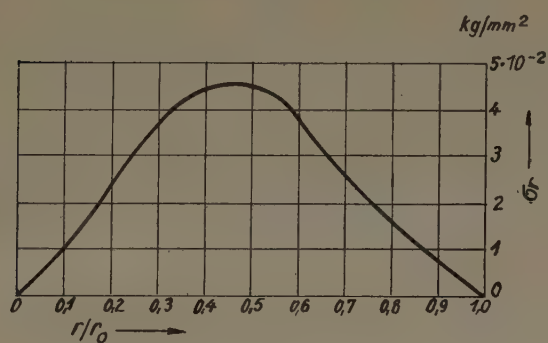


Bild 4. Normalspannung  $\sigma_x$  längs der Linie AB

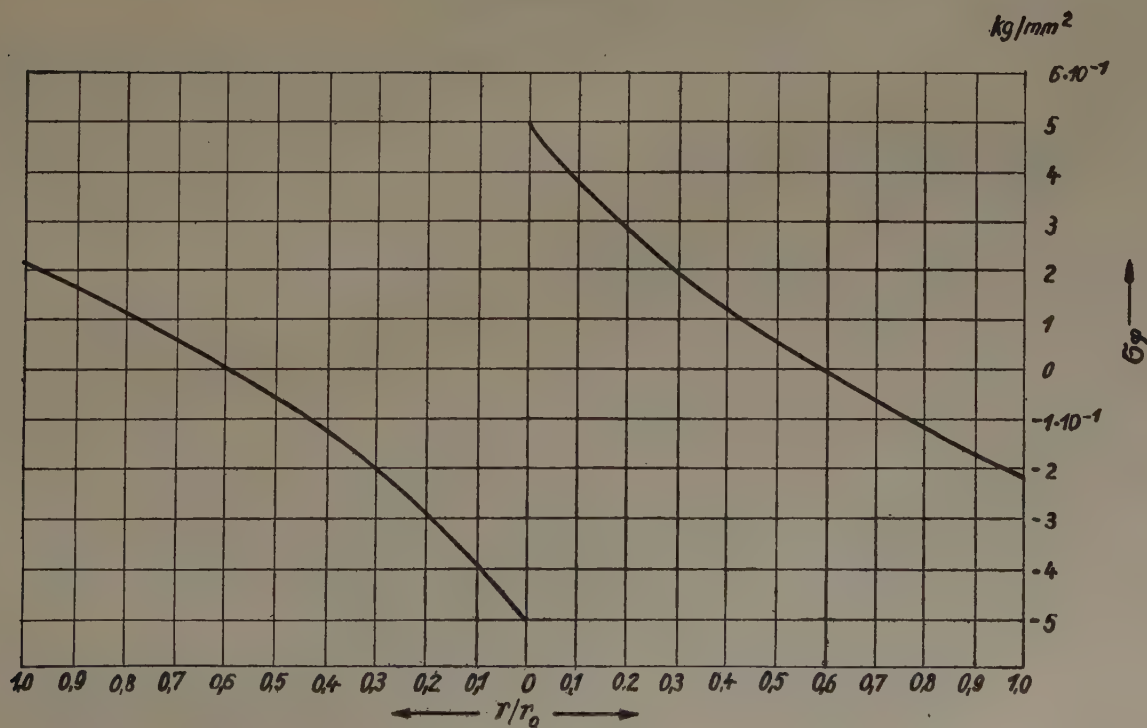


Bild 5. Normalspannung  $\sigma_y$  längs der auf Druck beanspruchten Seite von AB

Die gleiche Erledigung hätte die Frage gefunden, die Spannungen zu finden bei einem gleichförmig erwärmten Körper unter der Voraussetzung, daß dieser aus stetig anschließenden Sektoren mit verschiedener Wärmedehnung zusammengesetzt wurde.

Zum Schluß sind die allgemeinen Ausdrücke des konzentrischen Kreisausschnittes für den speziellen Fall zurechtgemacht, daß die Dichte sich längs einer parallel zu einem Durchmesser und der Zylinderachse verlaufenden Diskontinuitätsfläche unstetig ändert. Die Bedingung für eine solche Fläche lautet  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ . Der solcherart erzeugte Spannungszustand wurde für einige Durchmesser numerisch gegeben für  $\frac{m E \alpha T}{m - 1} = 1$ .

Bild 2 stellt eine Scheibe dar aus dem unendlich lang vorausgesetzten Zylinder, in der das fragliche Stück der Diskontinuitätsfläche durch Schraffur hervorgehoben wurde. Die Schubspannung längs des Radius  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ , also in der einen Hälfte der Trennfläche, sind in Bild 3 gezeichnet. Als Abszissenmaß wurde das Verhältnis  $r/r_0$  gewählt, wobei  $r_0$  der Kreisradius der Grundfläche und  $r$  ein innerer Punkt auf dieser sind. Als Ordinaten ist die Schubspannung  $\tau$  eingezeichnet, die längs dieses Teiles der Trennfläche auftritt. Die Schubspannung geht stetig durch die trennende Ebene hindurch. Die Normalspannung  $\sigma_\varphi$  wird in der Trennfläche null, während die Normalspannung  $\sigma_r$  vom Wert  $+1/2$  auf der einen Seite auf den Wert  $-1/2$  auf der anderen Seite springt. Beide Spannungen sind nicht eingezeichnet.

In Bild 4 und 5 sind die Spannungen  $\sigma_r$  und  $\sigma_\varphi$ , die längs der Linie  $AB$  des Bildes 2 auftreten, gegen die Abszisse  $r/r_0$  aufgetragen. Längs dieser Linien verschwindet die Schubspannung  $\tau$ . Die Normalspannungen sind zugleich Hauptspannungen.

An den Stellen  $r = r_0$ ,  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  und  $r = r_0$ ,  $\varphi = +\frac{\pi}{2}$  hat keine der Größen einen definierten Wert, sondern hängt jeweils ab von der Richtung, in welcher man in die betreffenden Punkte einläuft. Ist  $\gamma$  der Einlaufswinkel gegen die Trennlinie gemessen, so lautet z. B. der Ausdruck für die Normalspannung  $\sigma_r$  dort:

$$\sigma_r = \frac{1}{2\pi} \{-2 \sin^2 \gamma \sin 2\gamma + 2 \arctg(\cot \gamma)\}.$$

### Anhang

Es gilt  $\Gamma(r, \varphi; \psi)$  mit  $\psi = \varphi_0$  und  $\psi = -\varphi_0$ , wobei

$$R^{-2}(\psi) = r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos(\varphi + \psi),$$

$$R^{-2}(\pi) = r^2 + r_0^2 + 2 r r_0 \cos \varphi.$$

gesetzt ist.

Dann wird mit der unten angegebenen Festsetzung für  $\Gamma$

$$f = \Gamma(r, \varphi; \varphi_0) - \Gamma(r, \varphi; -\varphi_0)$$

und entsprechend

$$\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma(r, \varphi; \varphi_0)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma(r, \varphi; -\varphi_0)}{\partial r}$$

usw.

### Anhang 1

$$\begin{aligned} \Gamma(r, \varphi; \psi) = & \frac{1}{16\pi} \left[ 4r^2 - \frac{2(r_0^2 - r^2)^2 - 4r^4}{r^2} \cos 2\varphi + \psi \right] \left[ \arctg \left( \frac{r_0 - r}{r_0 + r} \cot \frac{\varphi + \pi}{2} \right) \right. \\ & \left. - \arctg \left( \frac{r_0 - r}{r_0 + r} \cot \frac{\varphi + \psi}{2} \right) \right] + \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 r^2} \left[ (r_0^4 - r_0^2 r^2) \{ (\pi - \psi) \cos 2(\varphi + \psi) \right. \\ & \left. + \sin(\varphi + \psi) + \sin(\varphi + 2\psi) + \sin 2(\varphi + \psi) \ln \frac{R^2(\pi)}{R^2(\psi)} \right. \\ & \left. + R^2(\psi) \{ 2r_0^3 r^3 \sin(\varphi + \psi) + (r_0^6 + r^6) \sin 2(\varphi + \psi) - (r r_0^5 + r_0 r^5) \sin 3(\varphi + \psi) \} \right. \\ & \left. + R^2(\pi) \{ 2r_0^3 r^3 \sin(\varphi) - (r_0^6 + r^6) \sin 2(\varphi + \psi) - (r r_0^5 + r_0 r^5) \sin(3\varphi + 2\psi) \} \right] \Bigg]. \end{aligned}$$

Anhang 2:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial I(r, \varphi; \psi)}{\partial \varphi}\right) = \\
 & \frac{1}{16\pi r^4}\left\{4(3r_0^4 - 2r_0^2 r^2 + r^4)\sin 2(\varphi + \psi)\left(\operatorname{arctg}\left\{\frac{r_0 - r}{r_0 + r}\cot\frac{\varphi + \psi}{2}\right\} - \operatorname{arctg}\left\{\frac{r_0 - r}{r_0 + r}\cot\frac{\varphi + \pi}{2}\right\}\right)\right. \\
 & + (8r^5 - 4r\{r_0^2 - r^2\}^2)\sin 2(\varphi + \psi)\left(\frac{-2r_0\cot\frac{\varphi + \psi}{2}}{(r_0 + r)^2 + (r_0 - r)^2\cot^2\frac{\varphi + \psi}{2}} + \frac{2r_0\cot\frac{\varphi + \pi}{2}}{(r_0 + r)^2 + (r_0 - r)^2\cot^2\frac{\varphi + \pi}{2}}\right) \\
 & + (4r^4 - 2\{3r_0^4 - 2r_0^2 r^2 + r^4\}\cos 2(\varphi + \psi)\frac{1}{2}(r_0^2 - r^2)(R^2(\pi) - R^2(\psi)) + (4r^5 + \{2r(r_0^2 - r^2)^2 \\
 & - 4r^5\}\cos 2(\varphi + \psi))(R^4(\pi)r_0\{(r_0^2 + r^2)\cos(\varphi + \pi) - 2r_0r\} - R^4(\psi)r_0\{(r_0^2 + r^2)\cos(\varphi + \psi) \\
 & - 2r_0r\}) + 2(-3r_0^4 + 2r_0^2 r^2 + r^4)(\pi - \psi)\sin 2(\varphi + \psi) \\
 & - 2(-3r_0^4 + 2r_0^2 r^2 + r^4)\cos 2(\varphi + \psi)\ln\frac{R^2(\pi)}{R^2(\psi)} + 2\frac{r}{r_0}(r_0^4 - r^4)(\cos(\varphi + \psi) + \cos(\varphi + 2\psi)) \\
 & - (-3r_0^4 + 2r_0^2 r^2 + r^4)\sin 2(\varphi + \psi)(R^2(\psi)2r_0r\sin(\varphi + \psi) + R^2(\pi)2r_0r\sin\varphi) \\
 & - r(r_0^2 - r^2)^2\sin 2(\varphi + \psi)(R^4(\psi)2r_0\{r_0^2 - r^2\}\sin(\varphi + \psi) + R^4(\pi)2r_0\{r_0^2 - r^2\}\sin\varphi) \\
 & - R^4(\psi)2r_0r^4(r_0^2 - r^2)\sin(\varphi + \psi)(-2r_0\sin(\varphi + \psi) - \frac{-2r_0^6 + 4r^6}{r_0^2 r^3}\sin 2(\varphi + \psi) \\
 & + \frac{-r_0^4 + 3r^4}{r_0 r^2}\sin 3(\varphi + \psi)) - \sin(\varphi + \psi)R^6(\psi)4r_0r^4(r^3 - 3r_0^2 r \\
 & + 2r_0^3\cos(\varphi + \psi))\left(-2r_0r\sin(\varphi + \psi) - \frac{r_0^6 + r^6}{r_0^2 r^2}\sin 2(\varphi + \psi) + \frac{r_0^4 + r^4}{r_0 r}\sin 3(\varphi + \psi)\right) \\
 & + R^4(\psi)2r_0r^4\{(r_0^2 + r^2)\cos(\varphi + \psi) - 2r_0r\}\left(-2r_0\cos(\varphi + \psi) - 2\frac{r_0^6 + r^6}{r_0^2 r^3}\cos 2(\varphi + \psi) \right. \\
 & \left. + 3\frac{r_0^4 + r^4}{r_0 r^2}\cos 3(\varphi + \psi)\right) + R^2(\psi)(r_0^2 - r^2)r^4\left(\frac{6(r_0^6 - r^6)}{r_0^2 r^4}\cos 2(\varphi + \psi) - \frac{6(r_0^4 - r^4)}{r_0 r^3}\cos 3(\varphi + \psi)\right) \\
 & + R^6(\pi)4r_0r^4\sin\varphi(r_0^3 - 3r_0^2 r - 2r_0^3\cos\varphi)\left(\frac{r_0^6 + r^6}{r_0^2 r^2}\sin 2(\varphi + \psi) + \frac{r_0^4 + r^4}{r_0 r}\sin(3\varphi + 2\psi)\right) \\
 & + R^4(\pi)r^4(r_0^2 - r^2)\left(-\frac{6(r_0^6 - r^6)}{r_0^2 r^4}\cos 2(\varphi + \psi) - \frac{6(r_0^4 - r^4)}{r_0 r^3}\cos(3\varphi + 2\psi)\right) \\
 & + 2R^4(\pi)r_0r^4(r_0^2 - r^2)\sin\varphi\left(-\frac{2r_0^6 + r^6}{r_0^2 r^3}\sin 2(\varphi + \psi) + \frac{-r_0^4 + 3r^4}{r_0 r^2}\sin(3\varphi + 2\psi)\right) \\
 & - R^4(\pi)2r_0r^4\{(r_0^2 + r^2)\cos\varphi + 2r_0r\}\left(2\frac{r_0^6 + r^6}{r_0^2 r^3}\cos 2(\varphi + \psi) + 3\frac{r_0^4 + r^4}{r_0 r^2}\cos(3\varphi + 2\psi)\right) \\
 & \left. - 4r(r_0^2 - r^2)^2\cos 2(\varphi + \psi)(R^2(\psi)\{r - r_0\cos(\varphi + \psi)\} - R^2(\pi)\{r + r_0\cos\varphi\})\right\}.
 \end{aligned}$$

Anhang 3:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma(r, \varphi; \psi)}{\partial r} = \\
& \frac{-1}{16\pi r^4} \left\{ (8r^4 - 4\{r_0^4 + r^4\} \cos 2(\varphi + \psi)) \left( \operatorname{arctg} \left\{ \frac{r_0 - r}{r + r_0} \cotg \frac{\varphi + \psi}{2} \right\} - \operatorname{arctg} \left\{ \frac{r_0 - r}{r_0 + r} \cotg \frac{\varphi + \pi}{2} \right\} \right) \right. \\
& + (4r^5 + \{2r(r_0^2 - r^2)^2 - 4r^5\} \cos 2(\varphi + \psi)) \left( \frac{-2r_0 \cot \frac{\varphi + \psi}{2}}{(r_0 + r)^2 + (r_0 - r)^2 \cot^2 \frac{\varphi + \psi}{2}} \right. \\
& \left. \left. + \frac{2r_0 \cot \frac{\varphi + \pi}{2}}{(r + r_0)^2 + (r_0 - r)^2 \cot^2 \frac{\varphi + \pi}{2}} \right) - 2(\psi - \pi)(r_0^4 - r^4) \cos 2(\varphi + \psi) \right. \\
& + 2(r_0^4 - r^4) \sin 2(\varphi + \psi) \ln \frac{R^2(\pi)}{R^2(\psi)} - r(r_0^2 - r^2)^2 \sin 2(\varphi + \psi) 2(R^2(\psi) \{r - r_0 \cos(\varphi + \psi)\} \\
& - R^2(\pi) \{r + r_0 \cos \varphi\}) - \frac{r}{r_0} (3r^4 - 2r_0^2 r^2 - r_0^4) (\sin(\varphi + \psi) + \sin(\varphi + 2\psi)) \\
& + 2r_0 \{-2r_0 r + (r_0^2 + r^2) \cos(\varphi + \psi)\} r^3 R^4(\psi) \left( -2r_0 r \sin(\varphi + \psi) - \frac{r_0^6 + r^6}{r_0^2 r^2} \sin 2(\varphi + \psi) \right. \\
& \left. + \frac{r_0^4 + r^4}{r_0 r} \sin 3(\varphi + \psi) \right) + r^3 (r_0^2 - r^2) R^2(\psi) \left( -2r_0 \sin(\varphi + \psi) - \frac{4r^6 - 2r_0^6}{r_0^2 r^3} \sin 2(\varphi + \psi) \right. \\
& \left. + \frac{3r^4 - r_0^4}{r_0 r^2} \sin 3(\varphi + \psi) \right) + 2r_0 \{-2r_0 r - (r_0^2 + r^2) \cos \varphi\} r^3 R^4(\pi) \left( \frac{r_0^6 + r^6}{r_0^2 r^2} \sin 2(\varphi + \psi) \right. \\
& \left. + \frac{r^4 + r_0^4}{r_0 r} \sin(3\varphi + 2\psi) \right) + r^3 (r_0^2 - r^2) R^2(\pi) \left( \frac{4r^6 - 2r_0^6}{r_0^2 r^3} \sin 2(\varphi + \psi) + \frac{3r^4 - r_0^4}{r_0 r^2} \sin(3\varphi + 2\psi) \right) \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Anhang 4:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Gamma(r, \varphi; \psi)}{\partial \varphi^2} = \\
& - \frac{1}{16\pi r^4} \left\{ (16r^4 - 8\{r_0^2 - r^2\}^2) \cos 2(\varphi + \psi) \left( \operatorname{arctg} \left\{ \frac{r_0 - r}{r_0 + r} \cot \frac{\varphi + \psi}{2} \right\} \right. \right. \\
& \left. \left. - \operatorname{arctg} \left\{ \frac{r_0 - r}{r_0 + r} \cot \frac{\varphi + \pi}{2} \right\} \right) + (8r^4 - 4\{r_0^2 - r^2\}^2) \sin 2(\varphi + \psi) (R^2(\pi) \{r_0^2 - r^2\} - R^2(\psi) \{r_0^2 - r^2\}) \right. \\
& - 4(r_0^2 - r^2)^2 (\psi - \pi) \cos 2(\varphi + \psi) + (4r^4 + \{2(r_0^2 - r^2)^2 - 4r^4\} \cos 2(\varphi + \psi)) (R^4(\psi) \{r_0^2 - r^2\} r_0 r \sin(\varphi + \psi) \\
& + R^4(\pi) \{r_0^2 - r^2\} r_0 r \sin \varphi) + \frac{r}{r_0} (r_0^2 - r^2)^2 (\sin(\varphi + \psi) + \sin(\varphi + 2\psi)) \\
& + 4(r_0^2 - r^2)^2 \sin 2(\varphi + \psi) \ln \frac{R^2(\pi)}{R^2(\psi)} - 4(r_0^2 - r^2)^2 \cos 2(\varphi + \psi) (R^2(\psi) 2r_0 r \sin(\varphi + \psi) \\
& + R^2(\pi) 2r_0 r \sin \varphi) - 2r_0 r (r_0^2 - r^2)^2 \sin 2(\varphi + \psi) (R^4(\psi) \{(r_0^2 + r^2) \cos(\varphi + \psi) - 2r_0 r\} \\
& + R^4(\pi) \{(r_0^2 + r^2) \cos \varphi + 2r_0 r\}) - R^6(\psi) 2r_0 r^3 (r_0^2 - r^2) \{(r_0^2 + r^2 + 2r r_0 \cos(\varphi + \psi)) \cos(\varphi + \psi) \\
& - 4r_0 r\} \left( -2r_0 r \sin(\varphi + \psi) - \frac{r_0^6 + r^6}{r^2 r_0^2} \sin 2(\varphi + \psi) + \frac{r_0^4 + r^4}{r_0 r} \sin 3(\varphi + \psi) \right) \\
& - 4R^4(\psi) r_0 r^5 (r_0^2 - r^2) \sin(\varphi + \psi) \left( -2 \frac{r_0}{r} \cos(\varphi + \psi) - 2 \frac{r_0^6 + r^6}{r^2 r^4} \cos 2(\varphi + \psi) + 3 \frac{r_0^4 + r^4}{r_0 r^3} \cos 3(\varphi + \psi) \right) \\
& + R^2(\psi) r^2 (r_0^2 - r^2) \left( 2r_0 r \sin(\varphi + \psi) + 4 \frac{r_0^6 + r^6}{r_0^2 r^2} \sin 2(\varphi + \psi) - 9 \frac{r_0^4 + r^4}{r_0 r} \sin 3(\varphi + \psi) \right) \\
& + R^6(\pi) 2r_0 r^3 (r_0^2 - r^2) \{(r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos \varphi) \cos \varphi + 4r r_0\} \left( \frac{r_0^6 + r^6}{r^2 r^2} \sin 2(\varphi + \psi) \right. \\
& \left. + \frac{r_0^4 + r^4}{r_0 r} \sin(3\varphi + 2\psi) \right) + 4R^4(\pi) r_0 r^3 (r_0^2 - r^2) \sin \varphi \left( 2 \frac{r_0^6 + r^6}{r^2 r^2} \cos 2(\varphi + \psi) \right. \\
& \left. + 3 \frac{r_0^4 + r^4}{r_0 r} \cos(3\varphi + 2\psi) \right) + R^2(\pi) r^2 (r_0^2 - r^2) \left( -4 \frac{r_0^6 + r^6}{r_0^2 r^2} \sin 2(\varphi + \psi) - 9 \frac{r_0^4 + r^4}{r_0 r} \sin(3\varphi + 2\psi) \right) \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Anhang 5:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Gamma(r, \varphi; \psi)}{\partial r^2} = \\ & - \frac{1}{16 \pi r^4} \left\{ (8r^4 - 4\{r_0^4 - 3r_0^4\} \cos 2(\varphi + \psi)) \left( \operatorname{arctg} \left\{ \frac{r_0 - r}{r_0 + r} \cotg \frac{\varphi + \psi}{2} \right\} - \operatorname{arctg} \left\{ \frac{r_0 - r}{r_0 + r} \cotg \frac{\varphi + \pi}{2} \right\} \right) \right. \\ & + 2(8r^5 - 4r\{r_0^4 + r^4\} \cos 2(\varphi + \psi)) \left( \frac{2r_0 \cot \frac{\varphi + \pi}{2}}{(r_0 + r)^2 + (r_0 - r)^2 \cot^2 \frac{\varphi + \pi}{2}} - \frac{2r_0 \cot \frac{\varphi + \psi}{2}}{(r_0 + r)^2 + (r_0 - r)^2 \cot^2 \frac{\varphi + \psi}{2}} \right) \\ & + (4r^6 + 2r^2\{(r_0^2 - r^2)^2 - 4r^4\} \cos 2(\varphi + \psi)) \left( \frac{4r_0 \cot \frac{\varphi + \psi}{2} \left\{ (r_0 + r) - (r_0 - r) \cot^2 \frac{\varphi + \psi}{2} \right\}}{\{(r_0 + r)^2 + (r_0 - r)^2 \cot^2 \frac{\varphi + \psi}{2}\}^2} \right. \\ & \left. - \frac{4r_0 \cot \frac{\varphi + \pi}{2} \left\{ (r_0 + r) - (r_0 - r) \cot^2 \frac{\varphi + \pi}{2} \right\}}{\{(r_0 + r)^2 + (r_0 - r)^2 \cot^2 \frac{\varphi + \pi}{2}\}^2} \right) + 2(\psi - \pi)(3r_0^4 + r^4) \cos 2(\varphi + \psi) \\ & - 2(r^4 + 3r_0^4) \sin 2(\varphi + \psi) \ln \frac{R^2(\pi)}{R^2(\psi)} + 4r(r_0^4 - r^4) \sin 2(\varphi + \psi) (2R^2(\psi) \{r - r_0 \cos(\varphi + \psi)\} \\ & + 2R^2(\pi) \{r + r_0 \cos \varphi\}) - \frac{r}{r_0} (6r^4 + 2r_0^4) (\sin(\varphi + \psi) + \sin(\varphi + 2\psi)) \\ & - 2r^2(r_0^2 - r^2) \sin 2(\varphi + \psi) (R^4(\psi) \{2r_0 r \cos(\varphi + \psi) - r^2 + r_0^2(1 - 2\cos^2(\varphi + \psi))\} \\ & + R^4(\pi) \{2r_0 r \cos \varphi + r^2 - r_0^2(1 - 2\cos^2 \varphi)\} \\ & + r^4(r_0^2 - r^2) R^2(\psi) \left( -\frac{12r^6 + 6r_0^6}{r_0^2 r^4} \sin 2(\varphi + \psi) + \frac{2r_0^4 + 6r^4}{r_0 r^3} \sin 3(\varphi + \psi) \right) \\ & - 4r_0^2 r^4 (r_0^2 - r^2) (1 - \cos^2(\varphi + \psi)) R^6(\psi) \left( -2r r_0 \sin(\varphi + \psi) - \frac{r_0^6 + r^6}{r_0^2 r^2} \sin 2(\varphi + \psi) \right. \\ & \left. + \frac{r_0^4 + r^4}{r_0 r} \sin 3(\varphi + \psi) \right) + 4r_0 r^4 \{-2r_0 r + (r_0^2 + r^2) \cos(\varphi + \psi)\} R^4(\psi) \left( -2r_0 \sin(\varphi + \psi) \right. \\ & \left. - \frac{4r^6 - 2r_0^6}{r_0^2 r^3} \sin 2(\varphi + \psi) + \frac{3r^4 - r_0^4}{r_0 r^2} \sin 3(\varphi + \psi) \right) \\ & - 4r_0^2 r^4 (r_0^2 - r^2) (1 - \cos^2 \varphi) R^6(\pi) \left( \frac{r_0^6 + r^6}{r_0^2 r^2} \sin 2(\varphi + \psi) + \frac{r_0^4 + r^4}{r_0 r} \sin(3\varphi + 2\psi) \right) \\ & + 4r_0 r^4 \{-2r_0 r - (r_0^2 + r^2) \cos \varphi\} R^4(\pi) \left( \frac{4r^6 - 2r_0^6}{r_0^2 r^3} \sin 2(\varphi + \psi) + \frac{3r^4 - r_0^4}{r_0 r^2} \sin(3\varphi + \psi) \right) \\ & \left. + (r_0^2 - r^2) r^4 R^2(\pi) \left( \frac{12r^6 + 6r_0^6}{r_0^2 r^4} \sin 2(\varphi + \psi) + \frac{2r_0^4 + 6r^4}{r_0 r^3} \sin(3\varphi + 2\psi) \right) \right\}. \end{aligned}$$

### Literatur

- [1] F. Neumann: Gesammelte Werke, Bd. 3 pp. 101—103.
- [2] W. Voigt: Lehrbuch der Kristallphysik. Leipzig-Berlin pp. 767—768.
- [3] F. Neumann: Gesammelte Werke, Bd. 3 pp. 114—121.
- [4] Kirchhoff: Crelles Journal f. Math. 56, p. 1, 1859.
- [5] Mushelisvili: Bulletin de L'Université de Tiflis 3, 1923.
- [6] B. E. Gatewood: Thermal Stresses in Long Cylindrical Bodies, 1940.
- [7] H. Lüddicke: Beitrag zur Statik homogener Kreisplatten und Kreismembranen. Diss. Halle 1937.
- [8] v. Mises-Frank: Differentialgleichungen der Physik. Braunschweig 1930, 3. Aufl. p. 851.
- [9] Courant-Hilbert: Methoden der mathematischen Physik Bd. II, Springer 1937, p. 275.

Eingegangen am 6. März 1953.

# Fehlerabschätzungen zur Störungsrechnung für lineare Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen<sup>\*)</sup>

Von J. Schröder in Hannover

Ausgehend von einem an anderer Stelle<sup>1)</sup> bewiesenen Satz über die Störung des Spektrums von Operatoren eines Hilbertschen Raumes werden Fehlerabschätzungen für lineare Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen hergeleitet. An Beispielen wird die Güte der Abschätzungen geprüft und die Größe der zulässigen Störungen veranschaulicht.

The author has recently proved a theorem<sup>1)</sup> on the perturbation of the spectrum of operators in a Hilbert space. By use of that theorem, estimations of the error for linear eigenvalue problems of ordinary differential equations are deduced. The goodness of the estimations is examined, and the amount of the permissible perturbations is demonstrated, by examples.

Prenant pour point de départ un théorème<sup>1)</sup>, prouvé à un autre endroit, sur la perturbation du spectre d'opérateurs d'un espace d'Hilbert, l'auteur déduit des estimations d'erreurs pour des problèmes linéaires de valeur-propre à des équations différentielles ordinaires. Le qualité des estimations est examiné par quelques exemples et le grandeur des permises perturbations est montré.

Отправляясь от прежде<sup>1)</sup> доказанной теоремы о возмущении спектра операторов гильбертова пространства, в работе выводятся оценки ошибок для линейных проблем собственных значений простых дифференциальных уравнений. Проверяется качество оценок и показывается, на примерах, число допустимых возмущений.

Es kommt vor, daß man eine gegebene Eigenwertaufgabe  $A\varphi = \lambda\varphi$  (Beispiel:  $-\varphi'' + q(x)\varphi = \lambda\varphi$  für Funktionen  $\varphi(x)$  mit  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ ) nicht in geschlossener Form lösen kann, für ein „benachbartes“ Problem  $A_0\varphi = \lambda\varphi$  (hier etwa  $-\varphi'' = \lambda\varphi$ ) Lösungen  $\lambda_0$ ,  $\varphi_0$  aber ohne Schwierigkeiten anzugeben vermag. Man kann dann versuchen, die gestörte Aufgabe  $A(\varepsilon)\varphi = \lambda\varphi$  mit  $A(\varepsilon)\varphi = A_0\varphi + \varepsilon A_1\varphi$  und  $A_1\varphi = A\varphi - A_0\varphi$  ( $-\varphi'' + \varepsilon q(x)\varphi = \lambda\varphi$ ), welche für  $\varepsilon = 1$  in das Ausgangsproblem übergeht, durch Potenzreihenansatz in  $\varepsilon$

$$\lambda = \lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \dots, \quad \varphi = \varphi(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \dots$$

zu lösen<sup>2)</sup>. Die Möglichkeit einer solchen Entwicklung von  $\lambda$  und  $\varphi$  wurde zuerst ausführlich von F. Rellich<sup>3)</sup> allgemein für gewisse Klassen von abstrakten Operatoren  $A(\varepsilon)$  untersucht. F. Rellich gab auch Fehlerabschätzungen für die nach dem  $n$ -ten Gliede abgebrochenen Reihen an. Andere Autoren führten diese Untersuchungen fort<sup>4)</sup>. Die Fehlerabschätzungen wurden vom Verfasser an anderer Stelle<sup>1)</sup> so weit verbessert, daß sie für die Anwendung in vielen Fällen brauchbar scheinen. Die dort erhaltenen Ergebnisse sollen hier zur Gewinnung von Aussagen für gewöhnliche Differentialgleichungen benutzt werden<sup>5)</sup>. Um die schematische Anwendung der Abschätzungen möglichst einfach zu machen, ist im Abschnitt 3 der Rechengang in seiner am häufigsten vorkommenden Gestalt beschrieben. — Im folgenden bedeute  $\varepsilon$  einen komplexen Parameter, den Störungsparameter. Setzt man in einem der betrachteten Störungsprobleme  $\varepsilon = 0$ , so entsteht das zugehörige ungestörte Problem.

## 1. Die Ergebnisse für abstrakte Operatoren

Es seien  $u, v, \varphi \dots$  die Elemente eines Hilbertschen Raumes  $\mathfrak{H}$ .  $(u, v)$  bedeute das innere Produkt zweier Elemente  $u, v$ ;  $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ . Der folgende Satz wird hier ohne Beweis genannt. Die darin vorkommenden Zahlen  $\alpha, \gamma, \varrho$  und Funktionen  $f_n(\varepsilon)$  erhält man unter Benutzung der in den Voraussetzungen erklärten Größen  $Q(\xi, \eta)$ ,  $\delta$  und  $\lambda_0$  sowie der Zahl  $\lambda_1 = (A_1\varphi_0, \varphi_0)$  aus den Gln. (5).

**Satz 1.** Es seien  $A_0$  und  $A_1$  lineare Operatoren des Hilbertschen Raumes  $\mathfrak{H}$  mit dem gleichen Definitionsbereich  $\mathfrak{A}$ .

<sup>\*)</sup> Diese Arbeit stellt im wesentlichen einen Teil der Dissertation des Verfassers dar, Fehlerabschätzungen zur Störungsrechnung bei linearen Eigenwertproblemen, Diss. Hannover 1952, Ref. Prof. Dr. L. Collatz und Prof. Dr.-Ing. W. Quade. Ein erster Teil erschien an anderer Stelle, s. 1). Gegenüber der unter 1) genannten Arbeit ist hier die Bezeichnungsweise geringfügig abgeändert.

<sup>1)</sup> J. Schröder, Fehlerabschätzungen zur Störungsrechnung bei linearen Eigenwertproblemen mit Operatoren eines Hilbertschen Raumes, Math. Nachr. 10 (1953), S. 113—128.

<sup>2)</sup> Eine ausführliche Darstellung des Verfahrens der Störungsrechnung für Differentialgleichungen findet man bei L. Collatz, Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Leipzig 1949, S. 378 ff. S. auch: R. Courant — D. Hilbert, Meth. d. math. Phys. I, 2. Aufl., Berlin 1931, 296—300; W. Meyer zur Capellen, Meth. z. angen. Lösg. v. Eigenwertpr. m. Anwendg. auf Schwingungsprobl., Ann. Phys. (5. Folge) 8 (1931), S. 297—352 und Genäh. Berechn. v. Eigenwert., Ing. Arch. 10 (1939), 167—174.

<sup>3)</sup> Literaturangaben über die Störungstheorie findet man am unter 1) a. O.

<sup>4)</sup> Insbesondere B. v. Sz. Nagy.

<sup>5)</sup> Wir beschränken uns hier auf die Störung einfacher Eigenwerte, am unter 1) a. O. wurden auch mehrfache behandelt.

a) Der Operator  $A_0$  sei hermitesch <sup>6)</sup> und besitze ein in  $\mathfrak{H}$  vollständiges Orthonormalsystem von Eigenelementen.

b) Es gebe eine für nichtnegative Werte der reellen Veränderlichen  $\xi, \eta$  erklärte, eindeutige und stetige Funktion  $Q(\xi, \eta)$ , derart daß

$$Q(\xi, \eta) \leq Q(\xi^*, \eta^*) \quad \text{für} \quad \xi \leq \xi^*, \quad \eta \leq \eta^* \quad \dots \quad (1a)$$

und

$$Q(a\xi, a\eta) = a Q(\xi, \eta) \quad \dots \quad (1b)$$

für jede nichtnegative Konstante  $a$  ist und für alle Elemente  $u$  aus  $\mathfrak{A}$

$$\|A_1 u\| \leq Q(\|u\|, \|A_0 u\|) \quad \dots \quad (2)$$

gilt.

c) Der Operator  $A_0$  besitze den einfachen Eigenwert  $\lambda_0$ , und es gebe eine positive Konstante  $\delta$ , derart daß im Intervall  $\lambda_0 - \delta < \lambda < \lambda_0 + \delta$  außer  $\lambda = \lambda_0$  kein Eigenwert von  $A_0$  liegt.  $\varphi_0$  sei ein zu  $\lambda_0$  gehöriges, normiertes Eigenelement;  $A_0 \varphi_0 = \lambda_0 \varphi_0$ ,  $\|\varphi_0\| = 1$ .

d) Es sei

$$A_1 \mathfrak{A} \subseteq \left( A_0 - \lambda_0 + \frac{\delta}{2} \right) \mathfrak{A}$$

und

$$K \mathfrak{H} \subseteq \left( A_0 - \lambda_0 + \frac{\delta}{2} + \varepsilon A_1 \right) \mathfrak{A} \quad \text{für} \quad |\varepsilon| < \varrho,$$

wenn  $K$  die beschränkte Fortsetzung des beschränkten Operators  $\left( A_0 - \lambda_0 + \frac{\delta}{2} \right)^{-1}$  auf ganz  $\mathfrak{H}$  bedeutet.

Dann gilt: Für  $|\varepsilon| < \varrho$  besitzt der Operator  $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1$  einen regulären Eigenwert  $\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots$  und ein zugehöriges reguläres <sup>7)</sup> Eigenelement  $\varphi(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots$ , für das  $(\varphi(\varepsilon), \varphi_0) = 1$  und  $A_0 \varphi(\varepsilon) = A_0 \varphi_0 + \varepsilon A_0 \varphi_1 + \varepsilon^2 A_0 \varphi_2 + \dots$ . Die Störungsglieder  $\lambda_n$  und  $\varphi_n$  (aus  $\mathfrak{A}$ ) sind die eindeutigen Lösungen der Rekursionsformeln

$$\lambda_n = (A_1 \varphi_{n-1}, \varphi_0); \quad (A_0 - \lambda_0) \varphi_n = -A_1 \varphi_{n-1} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \lambda_{n-\nu} \varphi_\nu, \quad (\varphi_n, \varphi_0) = 0; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Für  $|\varepsilon| < \varrho$  gelten die Fehlerabschätzungen

$$\begin{aligned} \left| \lambda(\varepsilon) - \sum_{\nu=0}^n \varepsilon^\nu \lambda_\nu \right| &\leq \delta \alpha |\varepsilon| f_n(\varepsilon), & \left\| \varphi(\varepsilon) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \varepsilon^\nu \varphi_\nu \right\| &\leq f_n(\varepsilon), \\ \left\| A_0 \left( \varphi(\varepsilon) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \varepsilon^\nu \varphi_\nu \right) \right\| &\leq (\delta + |\lambda_0|) f_n(\varepsilon), & n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

**Zusatz:** 1. Unter den Voraussetzungen a) bis c) des Satzes 1 existiert für  $|\varepsilon| < \varrho$  der Operator  $\left( A_0 - \lambda_0 + \frac{\delta}{2} + \varepsilon A_1 \right)^{-1}$ .

2. Wenn auch  $A_1$  hermetisch ist, gilt sogar

$$\left| \lambda(\varepsilon) - \sum_{\nu=0}^n \varepsilon^\nu \lambda_\nu \right| \leq \delta \gamma |\varepsilon| f_n(\varepsilon).$$

## 2. Anwendung auf Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen

a) In diesem Abschnitt werden Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen als Probleme in einem Hilbertschen Raum gedeutet, und es wird gezeigt, daß für diese dann die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt sind. Die daraus folgenden Ergebnisse findet man unter Vermeidung der Operatorschreibweise zusammengefaßt. Wir nennen zwei Eigenwertaufgaben identisch, wenn sie die gleichen Eigenwerte und -funktionen besitzen.  $x$  sei eine reelle Variable. Aussagen über Eigenschaften von Funktionen dieser Variablen (Stetigkeit, Integrierbarkeit usw.) sollen sich nur auf das Intervall  $0 \leq x \leq 1$  beziehen.

<sup>6)</sup> Ein (dicht definierter, linearer) Operator  $A$  heißt hermitesch, wenn für jedes Paar von Elementen  $u, v$  aus seinem Definitionsbereich  $(Au, v) = (u, Av)$ .

<sup>7)</sup> Ein Element  $\varphi(\varepsilon)$  heißt regulär für  $|\varepsilon| < \varrho$ , wenn es von  $\varepsilon$  unabhängige Elemente  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  gibt, derart daß  $\varphi(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots$  für  $|\varepsilon| < \varrho$ , d. h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \varphi(\varepsilon) - \sum_{\nu=0}^n \varepsilon^\nu \varphi_\nu \right\| = 0$ .

$u, v, \varphi, \dots$  seien quadratisch integrierbare Funktionen der Veränderlichen  $x$ , die gegebenenfalls auch noch von  $\varepsilon$  abhängen können<sup>8)</sup>.

b) Wir betrachten Eigenwertprobleme der folgenden Form:

$$M_0(\varphi) + \varepsilon M_1(\varphi) = \lambda g(x) \varphi(x) \quad \dots \dots \dots (3a),$$

$$U_\mu(\varphi) = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, 2m \quad \dots \dots \dots (3b),$$

mit

$$M_0(\varphi) = M_0(\varphi(x)) = \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu (p_\nu(x) \varphi^{(\nu)}(x))^{(\nu)}, \quad M_1(\varphi) = q_{2m}(x) M_0(\varphi) + \sum_{\nu=0}^{2m-1} q_\nu(x) \varphi^{(\nu)}(x),$$

$$U_\mu(\varphi) = \sum_{\nu=0}^{2m-1} [\alpha_{\mu\nu} \varphi^{(\nu)}(0) + \beta_{\mu\nu} \varphi^{(\nu)}(1)] \quad (m > 0).$$

Die darin vorkommenden Funktionen  $p_\nu, g, q_\nu$  und Konstanten  $\alpha_{\mu\nu}, \beta_{\mu\nu}$  seien gegeben und haben folgende Eigenschaften: die Funktionen  $p_\nu(x)$  sind reellwertig und besitzen stetige Ableitungen bis zur  $\nu$ -ten Ordnung,  $p_m(x) > 0$ ,  $g(x)$  ist stetig und positiv, die Funktionen  $q_\nu(x)$  sind stückweise stetig, die Konstanten  $\alpha_{\mu\nu}$  und  $\beta_{\mu\nu}$  sind reell, bei festem  $\mu$  verschwinden nicht alle Konstanten  $\alpha_{\mu\nu}$  und  $\beta_{\mu\nu}$  ( $\nu = 0, 1, \dots, 2m-1$ ).

Gesucht sind Zahlen  $\lambda$  (Eigenwerte) und Vergleichsfunktionen  $\varphi$  (Eigenfunktionen), die der gegebenen Differentialgleichung (3a) genügen. Als Vergleichsfunktionen seien dabei diejenigen Funktionen bezeichnet, die stetige Ableitungen bis zur  $(2m-1)$ -ten Ordnung und eine stückweise stetige  $2m$ -te Ableitung besitzen und den gegebenen Randbedingungen (3b) genügen.

c) Wir benutzen im folgenden ferner die Voraussetzung, daß die Randbedingungen (3b) voneinander linear unabhängig sind und für jedes Paar von Vergleichsfunktionen  $u, v$

$$\int_0^1 M_0(u) \bar{v} \, dx = \int_0^1 u \overline{M_0(v)} \, dx \quad \dots \dots \dots (4)$$

gilt<sup>9)</sup>. Diese Voraussetzung ist bei allen Aufgaben erfüllt, für die in den Tabellen I und II eine Abschätzungsfunktion angegeben ist.

d) Alle Probleme (3), für welche auch die unter c) genannte Voraussetzung erfüllt ist, lassen sich als Eigenwertaufgaben  $(A_0 + \varepsilon A_1) \varphi = \lambda \varphi$  in einem Hilbertschen Raum mit einem Operator  $A_0$  deuten, welcher der Voraussetzung a) des Satzes 1 genügt. Nur für einige spezielle Typen jedoch werden hier Abschätzungsfunktionen  $Q(\xi, \eta)$  angegeben, mit denen (1) und (2) gilt. (Diese Problemtypen und die zugehörigen Funktionen  $Q$  sind in den Tabellen I und II aufgeführt.) Es wurde aber versucht, die praktisch wichtigsten Aufgaben zu erfassen. Als ungestörte Differentialgleichungen wurden in der Hauptsache solche mit konstanten Koeffizienten — nämlich —  $\varphi'' = \lambda \varphi$  und  $\varphi^{IV} = \lambda \varphi$  — gewählt, da diese sich in geschlossener Form lösen lassen. Für die wichtigsten Randbedingungen sind die erhaltenen Abschätzungsfunktionen sehr einfach.

e) Zur Ermittlung der Abschätzungsfunktionen  $Q(\xi, \eta)$  aus den Tabellen I und II sei folgendes gesagt. Die in den Tabellen benutzten Bezeichnungen sind unten in Tabelle I erklärt. In den mit (A), (B), (C) bezeichneten Zeilen werden durch die Angabe spezieller Formen für  $M_0(\varphi)$  und  $M_1(\varphi)$  und zusätzlicher Voraussetzungen über die in der Differentialgleichung auftretenden Funktionen drei (sich z. T. überschneidende) Typen von Differentialgleichungen (3a) charakterisiert. Liegt eine Differentialgleichung von einem der angegebenen Typen vor, so kann man die darunter stehende Funktion  $Q(\xi, \eta)$  verwenden, falls die gegebenen Randbedingungen eine der jeweils in der mit „Randbedingungen“ überschriebenen Spalte genannten Formen haben und in den Fällen (A) und (C) außerdem die in der betreffenden Funktion gegebenenfalls vorkommenden Konstanten  $M, N$  bzw.  $K, L$  den Tabellen zu entnehmen sind. Diese Konstanten erhält man jeweils unter den in der nächsten Spalte genannten zusätzlichen Voraussetzungen (über die in den Randbedingungen auftretenden Konstanten) aus den beiden letzten Spalten. Ist der Faktor  $c_\nu$  eines Ausdruckes gleich Null, welcher eine solche, noch zu bestimmende Konstante enthält (d. h. ist  $q_\nu(x) \equiv 0$ ), so setze man das ganze Produkt gleich Null.

<sup>8)</sup> Im folgenden wird  $\varphi$  im allgemeinen von  $x$  und  $\varepsilon$  abhängen. Je nach Bedarf kennzeichnen wir sowohl die Abhängigkeit von  $x$  als auch die von  $\varepsilon$  durch runde Klammern  $[\varphi(x), \varphi(\varepsilon)]$ . Verwechslungen dürften kaum zu befürchten sein.  $\varphi^{(\nu)}$  bedeutet immer die  $\nu$ -te Ableitung nach  $x$ ,  $\varphi(0)$  bzw.  $\varphi(1)$  ist  $\varphi(x)$  an der Stelle  $x = 0$  bzw.  $x = 1$ , entsprechend  $\varphi'(0), \varphi''(1)$  usw.

<sup>9)</sup> Mit dem Querstrich wird der Übergang zur konjugiert komplexen Funktion gekennzeichnet. Sind alle Funktionen  $q_\nu$  reellwertig und interessiert man sich auch nur für reelle Werte  $\varepsilon$  (etwa  $\varepsilon = 1$ ), so braucht man auch nur reellwertige Funktionen  $u, v, \varphi, \dots$  zu betrachten. Dann kann der Querstrich hier wie im folgenden weggelassen. — Ist (4) erfüllt, so ist das ungestörte Problem (3) selbstadjungiert in dem etwa bei L. Collatz a. a. O. S. 48 ff. erklärten Sinne. Die Bezeichnung „Vergleichsfunktion“ findet man an der gleichen Stelle.

Man braucht sich dann nicht darum zu kümmern, ob diese Konstante mit Hilfe der Tabellen zu bestimmen ist. Für Differentialgleichungen vom Typ (A) sind für gewisse Randbedingungen sowohl Abschätzungsfunktionen aufgeführt, in denen  $M = 0$  ist, als auch solche, in denen  $N = 0$ . Im allgemeinen liefern letztere bessere Ergebnisse.

f) Für alle Eigenwertaufgaben (3), für welche in den Tabellen I und II eine Abschätzungsfunktion  $Q(\xi, \eta)$  angegeben ist, gilt der folgende Satz.

Satz 2: Die Aufgabe (3) habe für  $\varepsilon = 0$  den einfachen Eigenwert  $\lambda_0$ ,  $\varphi_0$  sei eine zugehörige, reellwertige, durch  $\int_0^1 g|\varphi_0|^2 dx = 1$  normierte Eigenfunktion.

Dann besitzt die Aufgabe für  $|\varepsilon| < \varrho$  ( $\varrho$  durch (5a) erklärt) einen Eigenwert  $\lambda(\varepsilon)$  und eine zugehörige Eigenfunktion  $\varphi(\varepsilon)$ , für die  $\int_0^1 g\varphi(\varepsilon)\varphi_0 dx = 1$ .  $\lambda(\varepsilon)$  und  $\varphi(\varepsilon)$  lassen sich in Potenzreihen nach  $\varepsilon$

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \dots, \quad \varphi(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \dots$$

(mit Vergleichsfunktionen  $\varphi_n$ ) entwickeln. Die Entwicklung der Eigenfunktion gilt bei festem  $\varepsilon$  bezüglich  $x$  im Sinne gleichmäßiger Konvergenz. Die Zahlen  $\lambda_n$  und Vergleichsfunktionen  $\varphi_n$  sind die Lösungen der folgenden Rekursionsformeln. Für  $|\varepsilon| < \varrho$  gelten die unten angegebenen Fehlerabschätzungen.

Rekursionsformeln ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ):

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \int_0^1 M_1(\varphi_{n-1}) \varphi_0 dx; \\ M_0(\varphi_n) - \lambda_0 g \varphi_n &= -M_1(\varphi_{n-1}) + g \sum_{\nu=0}^{n-1} \lambda_{n-\nu} \varphi_\nu, \\ U_\mu(\varphi_n) &= 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, 2m), \quad \int_0^1 g \varphi_n \varphi_0 dx = 0. \end{aligned}$$

Bezeichnungen: Es sei

$Q(\xi, \eta)$  eine bestimmte, für das vorliegende Problem in den Tabellen I und II angegebene Abschätzungsfunktion (vgl. 2e);

$\delta$  eine positive Konstante, derart daß im Intervall  $\lambda_0 - \delta < \lambda < \lambda_0 + \delta$  außer  $\lambda = \lambda_0$  kein Eigenwert des ungestörten Problems liegt (man wähle  $\delta$  möglichst groß);

$$\alpha = Q\left(\frac{1}{\delta}, 1 + \frac{|\lambda_0|}{\delta}\right), \quad \gamma = Q\left(\frac{1}{\delta}, \frac{|\lambda_0|}{\delta}\right), \quad r_1 = \frac{|\lambda_1|}{\delta}^{10}, \quad \varrho = \frac{1}{2\alpha + \gamma + r_1} \dots \dots \dots (5a);$$

$$l(\varepsilon) = \frac{\gamma|\varepsilon|}{1 - (\alpha + r_1)|\varepsilon|}, \quad k(\varepsilon) = \frac{\alpha|\varepsilon|}{1 - (\alpha + r_1)|\varepsilon|}, \quad f(\varepsilon) = l(\varepsilon) [1 + l(\varepsilon)k(\varepsilon) + 12l^2(\varepsilon)k^2(\varepsilon)]^{11} \quad (5b);$$

$$s_1 = \gamma, \quad s_2 = (\alpha + r_1)\gamma, \quad s_n = (\alpha + r_1)s_{n-1} + \alpha \sum_{\nu=1}^{n-2} s_{n-1-\nu} s_\nu, \quad n = 3, 4, \dots \dots \dots (5c);$$

$$f_1(\varepsilon) = f(\varepsilon), \quad f_n(\varepsilon) = f(\varepsilon) - \sum_{\nu=1}^{n-1} |\varepsilon|^\nu s_\nu, \quad n = 2, 3, \dots \dots \dots (5d);$$

$G(x, y)$  die Green'sche Funktion des ungestörten Problems (d. h. des Differentialausdrucks  $M_0(\varphi)$  zu den Randbedingungen (3b)), falls diese existiert <sup>12</sup>).

<sup>10</sup>) Auf Grund der Ungleichung  $r_1 \leq \gamma \leq \alpha$  kann man zur Vereinfachung  $r_1$  durch  $\gamma$  und  $\gamma$  seinerseits durch  $\alpha$  ersetzen, wodurch jedoch u. U. wesentlich an Genauigkeit verloren geht.

<sup>11</sup>) Eine insbesondere bei Berechnung einer größeren Anzahl von Störungsgliedern genauere Werte liefernde Funktion ist

$$f^*(\varepsilon) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4lk}}{2k} \quad (\text{für } s\alpha \neq 0) \quad \left( f^* = l \sum_{\nu=1}^{n-1} \left| \left( \frac{1}{\gamma} \right) \right|^{\frac{4\nu}{2}} (lk)^{\nu-1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} |\varepsilon|^\nu s_\nu \right)$$

<sup>12</sup>) Für die wichtigsten Probleme 2. und 4. Ordnung ist die Green'sche Funktion bei L. Collatz a. a. O. S. 425 f. aufgeführt.

Fehlerabschätzungen<sup>13)</sup> ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ):

	zusätzliche Voraussetzungen	Abschätzung unter der jeweils links stehenden zusätzlichen Voraussetzung
1	—	$\left  \lambda(\varepsilon) - \sum_{r=0}^n \varepsilon^r \lambda_r \right  \leq \delta \alpha  \varepsilon  f_n(\varepsilon)$ $\sqrt{\int_0^1 g  \varphi(\varepsilon) - \sum_{r=0}^{n-1} \varepsilon^r \varphi_r ^2 dx} \leq f_n(\varepsilon)$
2	Für jedes Paar von Vergleichsfunktionen $u, v$ gilt $\int_0^1 M_1(u) \bar{v} dx = \int_0^1 u \overline{M_1(v)} dx$	$\left  \lambda(\varepsilon) - \sum_{r=0}^n \varepsilon^r \lambda_r \right  \leq \delta \gamma  \varepsilon  f_n(\varepsilon)$
3	alle Eigenwerte der ungestörten Aufgabe sind positiv	$\left  \varphi(\varepsilon) - \sum_{r=0}^{n-1} \varepsilon^r \varphi_r \right  \leq \sqrt{G(x, x)} \sqrt{\delta +  \lambda_0 } f_n(\varepsilon)$
4	$\lambda = 0$ ist kein Eigenwert der ungestörten Aufgabe	$\left  \varphi(\varepsilon) - \sum_{r=0}^{n-1} \varepsilon^r \varphi_r \right  \leq \sqrt{\int_0^1 g(y)  G(x, y) ^2 dy} (\delta +  \lambda_0 ) f_n(\varepsilon)$

Tabelle I. — Differentialgleichungen 2. Ordnung

(A) $M_0(\varphi) = -\varphi'', M_1(\varphi) = -q_2 \varphi'' + q_1 \varphi' + q_0 \varphi$ , zus. Vor.: $g(x) \equiv 1$				
$Q(\xi, \eta) = (c_2 + c_1 \sqrt{N}) \eta + c_1 \sqrt{M} \sqrt{\eta} \xi + c_0 \xi$				
Randbedingungen	zusätzl. Vorauss.	$M$	$N$	
$a \varphi'(0) - b \varphi(0) = 0$ $c \varphi'(1) + d \varphi(1) = 0$	$ab \geq 0, cd \geq 0$	1	0	
	$b = 1$ $d = 1$	$\frac{c}{A}$	0	
	$\Delta < 0$ $c \geq 0$	$\frac{a}{A}$	0	
	$\Delta \neq 0$	0	$\frac{1}{A} + \frac{ ab  - ab}{2A^2} \left( c^2 + cd + \frac{d^2}{3} \right) + \frac{ cd  - cd}{2A^2} \left( a^2 + ab + \frac{b^2}{3} \right)$ oder $\frac{1}{6} + \frac{a^2 d^2 - abcd + b^2 c^2}{3A^2}$	
$\Delta = ad + bc + bd$	$b = d = 0$	0	$\frac{1}{\pi^2}$	
$\varphi(0) = a \varphi(1)$	—	1	0	
$a \varphi'(0) = \varphi'(1)$	$a = 1$	0	$\frac{1}{4\pi^2}$	

(B)  $M_0(\varphi) = -(p_1 \varphi')' + p_0 \varphi, M_1(\varphi) = q_2 M_0(\varphi) + q_1 \varphi' + q_0 \varphi$ , zus. Vor.:  $p_0(x) \geq 0$ 

Randbedingungen	$Q(\xi, \eta)$
$a \varphi'(0) - b \varphi(0) = 0$ mit $ab \geq 0$ $c \varphi'(1) + d \varphi(1) = 0$ mit $cd \geq 0$ $\varphi(0) = a \varphi(1)$ $a p_1(0) \varphi'(0) = p_1'(1) \varphi'(1)$	$c_2 \eta + \frac{c_1}{\sqrt{r \cdot s}} \sqrt{\eta} \xi + \frac{c_0}{s} \xi$ mit $p_1(x) \geq r > 0, g(x) \geq s > 0$

## Bezeichnungen in den Tabellen I, II

 $c_r$  sind Konstanten, mit denen  $|q_r(x)| \leq c_r$ , $A$  ist der Betrag des dem Betrage nach kleinsten Eigenwertes der ungestörten Aufgabe, $\alpha = \sqrt{A}$ .

<sup>13)</sup> L. Collatz weist a. a. O. S. 384 ff. darauf hin, daß  $\lambda_0 + \lambda_1$  den mit der Funktion  $\varphi_0$  gebildeten Rayleighschen Quotienten der gestörten Aufgabe für  $\varepsilon = 1$  darstellt. Ist auch diese Aufgabe selbstadjungiert, so folgt daraus, falls  $\lambda(1)$  der dem Betrage nach kleinste Eigenwert dieser Aufgabe ist,  $|\lambda_0(1)| \leq |\lambda + \lambda_1|$ , also  $\lambda(1) \leq \lambda_0 + \lambda_1$  im Falle  $\lambda_0 + \lambda_1 > 0$ .

**Beweis des Satzes 2.** Es sei  $\mathfrak{H}$  der Hilbertsche Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen  $u, v, \varphi, \dots$  mit dem inneren Produkt  $(u, v) = \int_0^1 g u \bar{v} dx$ .  $A_0$  und  $A_1$  seien die durch  $A_0 u = \frac{1}{g} M_0(u)$ ,  $A_1 u = \frac{1}{g} M_1(u)$  in der Linearmannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}$  der Vergleichsfunktionen definierten Operatoren. Das Problem (3) ist dann mit der Aufgabe  $(A_0 + \varepsilon A_1) \varphi = \lambda \varphi$  ( $\varphi$  aus  $\mathfrak{M}$ ) identisch. Wir prüfen zuerst, ob die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt sind.

Tabelle II — Differentialgleichungen 4. Ordnung

(C) $M_0(\varphi) = \varphi^{IV}$ , $M_1(\varphi) = q_4 \varphi^{IV} + q_3 \varphi''' + q_2 \varphi'' + q_1 \varphi' + q_0 \varphi$ , zus. Vor.: $g(x) \equiv 1$				
$Q(\xi, \eta) = c_4 \eta + c_3 Q_3(L, \xi, \eta) + c_2 \sqrt{\eta} \xi + c_1 Q_1(K, \xi, \eta) + c_0 \xi$ mit $Q_1(K, \xi, \eta) = \begin{cases} \sqrt{K + \frac{1}{\eta}} \sqrt{\eta} \xi & \text{falls } K \neq 0 \\ \frac{1}{\eta^{\frac{1}{4}}} \xi^{\frac{3}{4}} & \text{falls } K = 0 \end{cases}$ , $Q_3(L, \xi, \eta) = \begin{cases} \sqrt{L + \frac{1}{\eta}} \eta & \text{falls } L \neq 0 \\ \frac{1}{\eta^{\frac{3}{4}}} \xi^{\frac{1}{4}} & \text{falls } L = 0 \end{cases}$				
	Randbedingungen	zus. Vor.	$K$	$L$
1	Periodizität	—	0	0
2	$\varphi(0) = 0, a \varphi'''(1) - b \varphi(1) = 0$ $\varphi''(0) = 0, c \varphi''(1) + d \varphi'(1) = 0$ $a, b, c, d \geq 0$ $\Delta = 3(a d + b c) + b d$	$b + d > 0$	$\frac{1}{\Delta} \sqrt{a c (3a + b)(3c + d)}$	$\frac{3 b d}{\Delta^2} \sqrt{a^2 - \frac{2}{15} a b + \frac{2}{315} b^2}$ $\cdot \sqrt{c^2 + \frac{4}{5} c d + \frac{17}{105} d^2}$
3	$\varphi'''(0) = 0, a \varphi'''(1) - b \varphi(1) = 0$ $\varphi'(0) = 0, c \varphi''(1) + d \varphi'(1) = 0$ $a, b, c, d \geq 0$	$b > 0$	$\sqrt{\frac{a c}{b(c + d)}}$	$\frac{d}{c + d} \sqrt{\frac{2}{15}}$
		$b = c = 0$	0	0
4	$\varphi(0) = 0, a \varphi'''(1) - b \varphi(1) = 0$ $\varphi'(0) = 0, c \varphi''(1) + d \varphi'(1) = 0$ $a, b, c, d \geq 0$ $\Delta = 12 a(c + d) + b(4c + d)$	—	$\frac{1}{\Delta} \sqrt{a c (12a + b)(4c + d)}$	nicht berechnet
		$c = 1$ $d = 0$	$\frac{2}{\Delta} \sqrt{a(12a + b)}$	$\frac{4}{\Delta^2} \sqrt{12a^2 + \frac{7}{5} a b + \frac{8}{105} b^2}$ $\cdot \sqrt{36a^2 + 15 a b + \frac{68}{35} b^2}$
		$a = c = 0$	0	$\frac{2}{35} \sqrt{\frac{13}{3}}$ oder 0,119
5	$a \varphi'''(0) + b \varphi(0) = 0$ $c \varphi''(0) - d \varphi'(0) = 0$ $a \varphi'''(1) - b \varphi(1) = 0$ $c \varphi''(1) + d \varphi'(1) = 0$ $a, b, c, d \geq 0$	$b > 0$	Störungsprobleme mit derartigen „symmetrischen“ Randbedingungen lassen sich, falls $q_v(x) \equiv q_v(1 - x)$ ist, auf Probleme mit Randbedingungen vom Typ 2 und 3 zurückführen	
		$b = d = 0$	nicht berechnet	0
6	$a \varphi'''(0) + b \varphi(0) = 0$ $c \varphi''(0) - d \varphi'(0) = 0$ $a^* \varphi'''(1) - b^* \varphi(1) = 0$ $c^* \varphi''(1) + d^* \varphi'(1) = 0$ alle Koeffiz. $\geq 0$	$a c + a^* c^* = 0$	0	nicht berechnet
		$b d + b^* d^* = 0$	nicht berechnet	0

1. Der Operator  $A_0$  ist hermitesch, denn es gilt infolge (4) für jedes Paar von Vergleichsfunktionen  $u, v$

$$(A_0 u, v) = \int_0^1 M_0(u) \bar{v} dx = \int_0^1 u \overline{M_0(v)} dx = (u, A_0 v).$$

Außerdem besitzt das ungestörte Problem, d. h. der Operator  $A_0$ , nach bekannten Sätzen <sup>14)</sup> ein in  $\mathfrak{H}$  vollständiges Orthonormalsystem von Eigenfunktionen. Wie man ferner weiß, häufen sich die zugehörigen Eigenwerte im Endlichen nicht <sup>14)</sup>. Also gibt es sicher eine Konstante  $\delta$ , derart daß im Intervall  $\lambda_0 - \delta \leq \lambda < \lambda_0 + \delta$  außer  $\lambda = \lambda_0$  kein Eigenwert von  $A_0$  liegt. Die Voraussetzungen a) und c) des Satzes 1 sind also erfüllt.

<sup>14)</sup> S. etwa E. K a m k e, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I, 4. Aufl., Leipzig 1951, S. 208 f.

2. Es werde nun zunächst angenommen, daß auch die Voraussetzung b) mit der angegebenen Funktion  $Q(\xi, \eta)$  erfüllt ist, und unter dieser Annahme die Voraussetzung d) behandelt. Im folgenden sei  $|\varepsilon| < \varrho$ . Wie man aus den Tabellen abliest, gilt  $Q(\xi, \eta) \leq c_{2m} \eta$ , wenn  $|q_{2m}| \leq c_{2m}$ . Daraus folgt, falls  $q_{2m} \neq 0$ ,

$$p_m |1 + \varepsilon q_{2m}| \geq p_m (1 - |\varepsilon| c_{2m}) > p_m (1 - \varrho c_{2m}) \geq p_m \left(1 - \frac{c_{2m}}{\alpha}\right) \geq p_m \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{|\lambda_0|}{\delta}}\right) \geq 0,$$

der Koeffizient der höchsten Ableitung im Differentialausdruck

$$M_0(u) - \lambda_0 g u + \frac{\delta}{2} g u + \varepsilon M_1(u) \quad \dots \quad (6)$$

ist also von Null verschieden. Da außerdem nach dem Zusatz 1 zu Satz 1 die Reziproke des Operators  $\left(A_0 - \lambda_0 + \frac{\delta}{2} + \varepsilon A_1\right)$  existiert, läßt sich die Green'sche Funktion  $\Gamma(x, y, \varepsilon)$  des Differentialausdrucks (6) zu den Randbedingungen (3b) konstruieren.  $\left(A_0 - \lambda_0 + \frac{\delta}{2} + \varepsilon A_1\right) \mathfrak{A}$  ist dann aber die Menge der stückweise stetigen Funktionen  $\mathfrak{H}'$ , denn einerseits ist jede Funktion  $v$  der Form

$$v = \left(A_0 - \lambda_0 + \frac{\delta}{2} + \varepsilon A_1\right) u = \frac{1}{g} \left[ M_0(u) - \lambda_0 g u + \frac{\delta}{2} g u + \varepsilon M_1(u) \right] \quad \dots \quad (7)$$

(mit  $u$  aus  $\mathfrak{A}$ ) stückweise stetig, und andererseits ist die Gleichung (7) bei beliebiger stückweise stetiger Funktion  $v$  durch die Vergleichsfunktion  $u = \int_0^1 \Gamma(x, y, \varepsilon) g(y) v(y) dy$  erfüllt. Daraus folgt sofort  $A_1 \mathfrak{A} \subseteq \left(A_0 - \lambda_0 + \frac{\delta}{2}\right) \mathfrak{A}$ , da jede Funktion  $v = A_1 u$  (mit  $u$  aus  $\mathfrak{A}$ ) stückweise stetig ist.

Die Fortsetzung  $K$  des Operators  $\left(A_0 - \lambda_0 + \frac{\delta}{2}\right)^{-1}$  auf ganz  $\mathfrak{H}$  ist durch

$$K u = \int_0^1 \Gamma(x, y, 0) g(y) u(y) dy$$

für alle quadratisch integralen Funktionen  $u$  erklärt, also ist jede Funktion  $v$  der Gestalt  $v = K u$  stetig und damit für  $|\varepsilon| < \varrho$  auch  $K \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}' = \left(A_0 - \lambda_0 + \frac{\delta}{2} + \varepsilon A_1\right) \mathfrak{A}$ .

3. Die Herleitung der Abschätzungsfunktionen in den Tabellen kann hier nur an einem Beispiel erläutert werden. Wir benutzen dabei die in Tabelle I erklärten Bezeichnungen.  $u$  sei im folgenden eine beliebige Vergleichsfunktion. Von den erhaltenen Abschätzungsfunktionen  $Q(\xi, \eta)$  zeigt man leicht, daß sie den Beziehungen (1) genügen. Wir beweisen hier nur, daß mit ihnen

$$\|A_1 u\| \leq Q(\|u\|, \|A_0 u\|) \quad \dots \quad (8)$$

gilt.

Beispiel:  $-\varphi'' + \varepsilon [q_2(-\varphi'') + q_1\varphi' + q_0\varphi] = \lambda\varphi$ ,  $\varphi'(0) - b\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi'(1) = 0$ .

Für  $b \neq 0$  existiert die Green'sche Funktion des ungestörten Problems  $G(x, y) = \frac{1}{b} + x$  (für  $x \leq y$ ). Damit ist dann  $u(x) = \int_0^1 G(x, y) M_0(u(y)) dy$ .

Alle hier vorgeführten Abschätzungen gehen von der folgenden Ungleichung aus:

$$\|A_1 u\| \leq \|q_2 A_0 u\| + \|q_1 u'\| + \|q_0 u\| \leq c_2 \|A_0 u\| + c_1 \|u'\| + c_0 \|u\|.$$

Hierin ist nur noch  $\|u'\|$  abzuschätzen, was auf verschiedene Weise geschehen kann.

a) Ist  $b \neq 0$ , so hat man

$$\|u'\|^2 = \int_0^1 \left| \int_0^1 \frac{d}{dx} G(x, y) M_0(u(y)) dy \right|^2 dx \leq \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{d}{dx} G(x, y) \right|^2 dx dy \|A_0 u\|^2 = \frac{1}{2} \|A_0 u\|^2,$$

insgesamt also (8) mit

$$Q(\xi, \eta) = \left(c_2 + c_1 \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}}\right) \eta + c_0 \xi.$$

b) Mittels partieller Integration erhält man

$$(u', u') = -b|u(0)|^2 + (A_0 u, u) \leq -b|u(0)|^2 + \|A_0 u\| \|u\|.$$

Für  $b \geq 0$  folgt daraus

$$(u', u') \leq \|A_0 u\| \|u\| \quad \dots \quad (9).$$

Im Falle  $b < 0$  schätzt man weiter ab

$$|u(0)|^2 = \left| \int_0^1 G(0, y) M_0(u(y)) dy \right|^2 \leq \int_0^1 |G(0, y)|^2 dy \cdot \|A_0 u\|^2 = \frac{1}{b^2} \|A_0 u\|^2.$$

Für  $b \neq 0$  erhält man wegen  $\|u\| \leq \frac{1}{A} \|A_0 u\|$  also insgesamt (8) mit

$$Q(\xi, \eta) = \left( c_2 + c_1 \sqrt{\frac{1}{A} + \frac{|b| - b}{2b^2}} \right) \eta + c_0 \xi.$$

c) Ist  $b \geq 0$ , so gilt (8) wegen (9) mit

$$Q(\xi, \eta) = c_2 \eta + c_1 \sqrt{\eta} \xi + c_0 \xi.$$

4. Falls für jedes Paar  $u, v$  von Vergleichsfunktionen  $\int_0^1 M_1(u) \bar{v} dx = \int_0^1 u \bar{M}_1(v) dx$  gilt, ist auch  $A_1$  hermitesch, dann ist also auch die in Zusatz 2 zu Satz 1 genannte Voraussetzung erfüllt.

5. Aus dem bisherigen Beweis folgen mit Satz 1 und Zusatz 2 die Behauptungen des Satzes 2 bis auf die im folgenden bewiesenen, daß die Reihe  $\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots$  gleichmäßig gegen  $\varphi(\varepsilon)$  konvergiert und die Fehlerabschätzungen 3 und 4 richtig sind.

Existiert  $G(x, y)$ , so hat man

$$|u(x)| = \left| \int_0^1 G(x, y) M_0(u(y)) dy \right| \leq \sqrt{\int_0^1 g(y) |G(x, y)|^2 dy} \|A_0 u\| \quad \dots \quad (10).$$

Ist  $\lambda = 0$   $h$ -facher Eigenwert der ungestörten Aufgabe zu den reellwertigen, orthonormalen Eigenfunktionen  $\psi^v(x)$  ( $v = 1, 2, \dots, h$ ) ( $(\psi^v, \psi^\mu) = \delta_{v\mu}$ ) und  $G^*(x, y)$  die zugehörige, reellwertige, symmetrische, durch  $\int_0^1 G^*(x, y) g(x) \psi^v(x) dx = 0$  ( $v = 1, 2, \dots, h$ ) festgelegte verallgemeinerte Green'sche Funktion<sup>15)</sup>, so gilt an Stelle von (10)

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \sum_{v=1}^h |(u, \psi^v)| |\psi^v(x)| + \left| \int_0^1 G^*(x, y) M_0(u(y)) dy \right| \\ &\leq \sum_{v=1}^h |\psi^v(x)| \|u\| + \sqrt{\int_0^1 g(y) |G^*(x, y)|^2 dy} \|A_0 u\|. \end{aligned}$$

Infolge dieser Ungleichungen und wegen der Beschränktheit der Funktionen  $g(x)$ ,  $G(x, y)$ ,  $G^*(x, y)$ ,  $\psi^v(x)$  sowie der im Satz 1 genannten Konvergenz der Reihen  $\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots$  und  $A_0 \varphi_0 + \varepsilon A_0 \varphi_1 + \varepsilon^2 A_0 \varphi_2 + \dots$  gegen  $\varphi(\varepsilon)$  bzw.  $A_0 \varphi(\varepsilon)$  im Sinne der Metrik des Hilbertschen Raumes  $\mathcal{H}$ , konvergiert die Reihe  $\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots$  bei festem  $\varepsilon$  auch gleichmäßig in  $x$  gegen  $\varphi(\varepsilon)$ .

Sind alle (ihrer Vielfachheit entsprechend oft gezählten) Eigenwerte  $\lambda^v$  ( $v = 1, 2, 3, \dots$ ) der ungestörten Aufgabe positiv —  $\varphi^v(x)$  seien zugehörige, orthonormale Eigenfunktionen,  $(\varphi^v, \varphi^\mu) = \delta_{v\mu}$  — so erhält man unter Benutzung des Mercer'schen Satzes<sup>16)</sup>

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &= \left| \sum_{v=0}^{\infty} (u, \varphi^v) \varphi^v(x) \right|^2 \leq \sum_{v=0}^{\infty} \frac{|\varphi^v(x)|^2}{\lambda^v} \cdot \sum_{v=0}^{\infty} \lambda^v |(u, \varphi^v)|^2 = G(x, x) (A_0 u, u) \\ &\leq G(x, x) \|A_0 u\| \|u\| \quad \dots \quad (11). \end{aligned}$$

Aus den Ungleichungen (10), (11) und den im Satz 1 angegebenen Fehlerabschätzungen folgen die Fehlerabschätzungen 3 und 4.

Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

### 3. Rechengang und Ergebnis im einfachsten Fall<sup>17)</sup>

Im allgemeinen ist eine Eigenwertaufgabe nicht bereits in der Form eines Störungsproblems (3) mit einem Parameter  $\varepsilon$  gegeben, sondern man muß, um die hier genannten Ergebnisse anwenden zu können, erst versuchen, ein Störungsproblem (3) zu ermitteln, welches für  $\varepsilon = 1$

<sup>15)</sup> Vgl. E. Kamke a. a. O. S. 190 ff.

<sup>16)</sup> Vgl. R. Goursat — D. Hilbert a. a. O. S. 117.

<sup>17)</sup> Oft wird man von den Störungsgliedern nur  $\lambda_1$  berechnen und auch nur den Eigenwert abschätzen. Für diesen einfachsten, zugleich aber praktisch wichtigsten Fall wird hier der Rechengang beschrieben.

in die gegebene Aufgabe übergeht und für  $\varepsilon = 0$  einfach zu lösen ist und in dem man  $M_1(\varphi)$  als „kleine Störung“ auffassen kann. Es sei hier angenommen, daß ein solches Problem (3) bereits vorliege und dessen Eigenwerte für  $\varepsilon = 1$  gesucht sind. Man gehe dann wie im folgenden unter 1. bis 3. beschrieben vor und erhält das unter 4. genannte Ergebnis.

1. Man prüfe, ob die vorliegende Aufgabe die unter 2b beschriebene Form hat<sup>18)</sup> und ob in den Tabellen I und II eine für diese Aufgabe zu verwendende „Abschätzungsfunktion“  $Q(\xi, \eta)$  angegeben ist<sup>18)</sup> (siehe dazu 2e).

2. Man berechne einen Eigenwert  $\lambda_0$  der ungestörten Aufgabe (d. h. der Aufgabe (3) mit  $\varepsilon = 0$ ) sowie eine zugehörige, reellwertige, durch  $\int_0^1 g|\varphi_0|^2 dx = 1$  normierte Eigenfunktion  $\varphi_0(x)$ , stelle fest, ob  $\lambda_0$  ein einfacher Eigenwert ist<sup>18)</sup> und berechne dann weiter die Zahl

$$\lambda_1 = \int_0^1 M_1(\varphi_0) \varphi_0 dx.$$

3. Man ermittle die oben unter „Bezeichnungen“ angegebenen Hilfsgrößen bis einschließlich (5b), wobei man überall  $\varepsilon = 1$  setze, und stelle fest, ob  $\varrho > 1$  ist<sup>18)</sup>. (Zur Ermittlung von  $Q(\xi, \eta)$  hat man die Funktionen  $q_v(x)$  abzuschätzen und gegebenenfalls weitere in  $Q$  vorkommende Zahlen zu berechnen.)

4. Ist  $\lambda_0$  ein einfacher Eigenwert der ungestörten Aufgabe und  $\varrho > 1$ , so besitzt die Aufgabe (3) für  $\varepsilon = 1$  einen Eigenwert  $\lambda$ , für den  $|\lambda - (\lambda_0 + \lambda_1)| \leq \delta \alpha f(1)$ . Ist für alle Vergleichsfunktionen  $u, v$

$$\int_0^1 M_1(u) \bar{v} dx = \int_0^1 u \overline{M_1(v)} dx$$

(das wird oft der Fall sein und ist mittels partieller Integration festzustellen), so gilt sogar  $|\lambda - (\lambda_0 + \lambda_1)| \leq \delta \gamma f(1)$ <sup>13)</sup>.

#### 4. Zwei Beispiele

Beispiel 1 (bei diesem Beispiel werden die Näherungen für die Eigenwerte mit den exakten Werten verglichen):

$$-(x+a)^2 \varphi' = \lambda^* \varphi, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 0, \quad a = 20.$$

Als Störungsproblem, welches für  $\varepsilon = 1$  in diese Aufgabe übergeht, wählen wir

$$M_0(\varphi) + \varepsilon M_1(\varphi) = \lambda \varphi, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 0 \quad \text{mit} \quad M_0(\varphi) = -\varphi'', \quad M_1(\varphi) = q_2(-\varphi'') + q_1 \varphi' \quad (12)$$

und  $\lambda = b\lambda^*$ ,  $q_2 = b(x+a)^2 - 1$ ,  $q_1 = -q_2'$ ,  $\frac{1}{b} = a^2 + a + \frac{1}{2}$ . Es wurde  $-\frac{1}{b} \varphi''$  abgespalten und  $b$  so bestimmt, daß  $c_2$  ein Minimum wird.

Die Aufgabe (12) ist von der unter 2b beschriebenen Form und speziell vom Typ (A) in Tabelle I. Wir können die dort angegebene Abschätzungsfunktion mit  $M = 1$  und  $N = 0$  verwenden.

Eigenwerte und -funktionen des ungestörten Problems:

$$\lambda^v = v^2 \pi^2, \quad \varphi^v(x) = \sqrt{2} \sin v \pi x, \quad v = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Störungsglied } \lambda_1 \text{ für } \lambda_0 = \pi^2: \quad \lambda_1 = \frac{b}{2} \left(1 - \frac{\pi^2}{3}\right) = -0,002722 \dots$$

$$\text{Hilfsgrößen:} \quad c_2 = \frac{41}{841}, \quad c_1 = \frac{84}{841}, \quad Q(\xi, \eta) = c_2 \eta + c_1 \sqrt{\eta \xi}, \quad \delta = 3\pi^2,$$

$$\alpha = 0,08620, \quad \gamma = 0,02685, \quad r_1 = 0,000092, \quad \varrho = 5,01,$$

$$l(1) = 0,029387, \quad k(1) = 0,094342, \quad f(1) = 0,029471, \quad G(x, x) = x(1-x).$$

Der Maximalbetrag des Koeffizienten der zweiten bzw. ersten Ableitung im Differentialausdruck  $M_1(\varphi)$  ( $c_2$  bzw.  $c_1$ ) beträgt etwa 5 bzw. 10 % vom Betrage 1 des Koeffizienten der zweiten Ableitung in  $M_0(\varphi)$ . Es handelt sich also um eine kleine Störung. Die Störungsrechnung erscheint als geeignetes Mittel zur Lösung der Aufgabe.

Fehlerabschätzungen für den Eigenwert (an der Stelle  $\varepsilon = 1$ ): Für jedes Paar von Vergleichsfunktionen  $u, v$  gilt  $\int_0^1 M_1(u) \bar{v} dx = \int_0^1 u \overline{M_1(v)} dx$ . Daher ist

$$|\lambda - (\lambda_0 + \lambda_1)| \leq \delta \gamma f(1) = 0,02344.$$

Das ergibt  $\lambda^* = 4149,02 \pm 9,86$  (der genaue Wert ist  $\lambda^* = 4146,306 \dots$ ).

$$\left[ \text{Für } a = 10 \text{ erhält man } c_2 = \frac{21}{221}, \quad c_1 = \frac{44}{221}, \quad \varrho = 2,55, \quad \lambda^* = 1089,45 \pm 11,15, \quad \lambda^* = 1086,72 \dots \right].$$

<sup>18)</sup> Ist dies nicht der Fall, so kommt man mit Hilfe der hier genannten Ergebnisse zu keiner Abschätzung.

Benutzt man die Tatsache, daß  $\lambda$  der kleinste Eigenwert der gestörten Aufgabe für  $\varepsilon = 1$  ist <sup>19)</sup>, so ergibt sich nach L. Collatz <sup>13)</sup>  $\lambda \leq \lambda_0 + \lambda_1$ , also  $4139,16 \leq \lambda^* \leq 4149,02$ ,  $\lambda^* = 4144,09 \pm 4,93$  [für  $a = 10$ :  $1078,30 \leq \lambda^* \leq 1089,45$ ,  $\lambda^* = 1083,88 \pm 5,58$ ].

Fehlerabschätzungen für die Eigenfunktion ( $\varepsilon = 1$ ,  $\varphi_0 = \sqrt{2} \sin \pi x$ ):

$$\sqrt{\int_0^1 |\varphi(x) - \varphi_0|^2 dx} \leq 0,0295.$$

Da alle Eigenwerte  $\lambda^*$  positiv sind, gilt nach Abschätzung 3

$$|\varphi(x) - \varphi_0| \leq \sqrt{x(1-x)} 0,1852 \leq 0,0926.$$

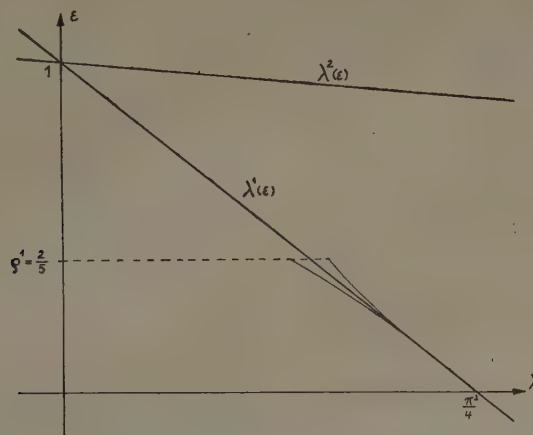
Beispiel 2 (an diesem Beispiel wird veranschaulicht, wie sich der mit einer bestimmten Funktion  $Q(\xi, \eta)$  gebildete Wert  $\varrho$  bei verschiedenartiger Störung verhält):

$$-\varphi'' + \varepsilon [q_2(-\varphi'') + q_1\varphi' + q_0\varphi] = \lambda\varphi, \varphi(0) = 0, \varphi'(1) = 0.$$

Die Eigenwerte der ungestörten Aufgabe:  $\lambda^* = \left(\frac{2\nu-1}{2}\right)^2 \pi^2$ ,  $\nu = 1, 2, 3, \dots$ . Wir unterscheiden auch die zugehörigen gestörten Eigenwerte und Zahlen  $\alpha, \gamma, \varrho$  durch Anhängen eines oberen Index  $\nu$ . Die unten genannten Zahlen wurden mit Hilfe der Funktion  $Q = c_2\eta + c_1\sqrt{\eta\xi} + c_0\xi$  erhalten,  $r_1$  wurde überall durch  $\gamma$  ersetzt (vgl. <sup>10)</sup>).

Die folgende Tabelle gibt die Werte  $\varrho^*$  für drei spezielle Zahlentripel ( $c_2, c_1, c_0$ ) an

$c_2$	$c_1$	$c_0$	$\alpha^1$	$\gamma^1$	$\varrho^1$	$\varrho^*(\nu > 1)$	$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varrho^*$
1	0	0	$\frac{9}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2(\nu-1)}{4\nu^2-3}$	0
0	1	0	$\frac{3}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2(\nu-1)\pi}{2\nu-1+\sqrt{4\nu^2+4\nu-7}}$	$\frac{\pi}{2}$
0	0	1	$\frac{1}{2\pi^2}$	$\frac{1}{2\pi^2}$	$\frac{\pi^2}{2}$	$\frac{(\nu-1)\pi^2}{2}$	$\infty$



Eingezeichnet sind  $\varrho^1$ ,  $\lambda^1(\varepsilon)$ ,  $\lambda^2(\varepsilon)$  und die Schranken

$$\lambda_0 + \varepsilon\lambda \pm \delta\gamma|\varepsilon|f(\varepsilon) \text{ für } \lambda_0 = \frac{\pi^2}{4};$$

Ist speziell  $q_2 \equiv -1$ ,  $q_1 \equiv q_0 \equiv 0$ , so erhält man  $\lambda^*(\varepsilon) = \lambda^* \cdot (1 - \varepsilon)$ ; für  $\varepsilon = 1$  entsteht ein Eigenwert (Null) unendlicher Vielfachheit (s. das Bild, in welchem  $\varrho_1$  <sup>20)</sup>,  $\lambda^1(\varepsilon)$ ,  $\lambda^2(\varepsilon)$  und die Schranken  $\lambda_0 + \varepsilon\lambda \pm \delta\gamma|\varepsilon|f(\varepsilon)$  für  $\lambda_0 = \frac{\pi^2}{4}$  eingezeichnet sind).

<sup>19)</sup> Dies folgt hier aus den Sätzen der Störungstheorie, vgl. <sup>3)</sup>. In vielen Fällen wird man eine derartige Aussage aber auch auf Grund der physikalischen Bedeutung des gerade vorliegenden Problems machen können.

<sup>20)</sup> Eine genauere, im Falle eines hermiteschen Störoperators gültige Formel (s. die unter \*) genannte Diss.) führt auf  $\varrho_1^* = \frac{2}{5}$  als untere Schranke für den Konvergenzradius von  $\lambda^1(\varepsilon)$ .

# Die turbulente Strömung an einer angeblasenen rotierenden Scheibe<sup>\*)</sup>

Von E. Truckenbrodt in Braunschweig

*Es wird die turbulente Strömung an einer rotierenden ebenen Scheibe berechnet, die gleichzeitig in Richtung der Drehachse angeströmt wird. Die Dicke der durch die Drehbewegung mitgeschleppten Schicht und damit auch das Drehmoment sind stark abhängig von dem Verhältnis der Anströmungsgeschwindigkeit zur Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe.*

*This paper deals with the turbulent boundary layer at the surface of a rotating disc, in a stream parallel to the axis of rotation. The thickness of the boundary layer and therefore also the moment of the rotating disc depend strongly on the ratio of the velocity of the axial flow to the peripheral velocity of the disc.*

*L'écoulement turbulent à un disc plat rotatoire, lequel s'épanche en même temps dans la direction de l'axe tournant, est calculé. L'épaisseur de la couche entraînée par la rotation et avec cela aussi le moment du disc rotatoire dépend beaucoup de la proportion de la vitesse de l'écoulement parallèle à l'axe de rotation à la vitesse périphérique du disc.*

В настоящей статье вычисляется турбулентное течение около вращающегося плоского диска, одновременно натекаемого в направлении оси вращения. Толщина слоя, захваченного вращательным движением, а вместе с тем и момент вращения, в значительной степени зависят от отношения скорости натекания к окружной скорости диска.

## 1. Einleitung

Die Strömungsvorgänge an einem angeströmten Körper, welcher eine Drehbewegung ausführt, spielen bei Strömungsmaschinen und Geschoßkörpern eine wichtige Rolle. Über die Bedeutung dieses Einflusses wurde bereits in einer Arbeit von H. Schlichting und E. Truckenbrodt [1] berichtet, die sich mit der Berechnung der laminaren Reibungsschicht an einer angeblasenen rotierenden Scheibe befaßt<sup>1)</sup>. Die vorliegende Arbeit stellt die Erweiterung der in [1] behandelten Aufgabe auf den Fall turbulenter Strömung dar, der technisch von größerer Bedeutung ist. Der Sonderfall einer in ruhender Flüssigkeit umlaufenden Scheibe ist schon frühzeitig von Th. von Kármán [2] und später von S. Goldstein, vgl. [3], S. 404 behandelt worden.

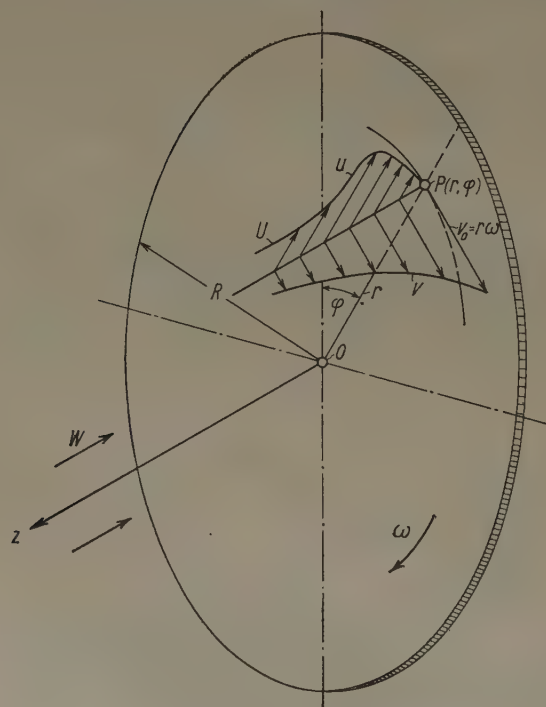


Bild 1. Erläuterungsskizze.

Koordinaten	Geschwindigkeiten
radial $r$	$u, U$
azimutal $\varphi$	$v, V$
axial $z$	$w, W$

## 2. Grundgleichungen

Für die Berechnung der Strömung legen wir Zylinderkoordinaten nach Bild 1 zugrunde. Die Scheibe liege in der Ebene  $z = 0$ ; sie drehe sich um die  $z$ -Achse mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . In der Ebene der Scheibe seien die Koordinaten  $r$  und  $\varphi$ . Die Geschwindigkeitskomponenten seien  $u$  in radialer Richtung und  $v$  in Umfangsrichtung. Entsprechend seien  $\tau_r$  und  $\tau_\varphi$  die Wandschubspannungen in den beiden Richtungen.

Nehmen wir an, daß sich die Scheibe in radialer Richtung bis ins Unendliche erstreckt, dann gilt für die potentialtheoretische Geschwindigkeitsverteilung der in Richtung der negativen  $z$ -Achse angeströmten Scheibe (rotationssymmetrische Staupunktsströmung)

$$U = ar; \quad V = 0; \quad W = -2az \quad (1).$$

<sup>\*)</sup> Die vorliegende Arbeit stellt den ersten Teil einer von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Hochschule Braunschweig angenommenen Habilitationsschrift mit dem Titel „Die Strömung um rotierende Drehkörper bei axialer Anströmung“ dar. (Berichter Prof. Dr. H. Schlichting, Mitberichter Prof. Dr. H. Blenk). Der zweite Teil mit dem Titel „Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der Reibungsschicht an axial angeströmten rotierenden Drehkörpern“ ist inzwischen erschienen, [5].

Diese Untersuchungen wurden mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Institut für Strömungsmechanik der T. H. Braunschweig durchgeführt.

<sup>1)</sup> Inzwischen ist die exakte Lösung der in [1] behandelten Aufgabe von A. N. Tifford und Sheng To Ch u angegeben worden [4]. Die Übereinstimmung mit der Näherungslösung [1] ist recht zufriedenstellend.

Es bedeutet  $\alpha$  eine Konstante, die wir für eine Kreisscheibe mit dem Radius  $R$  nach [1] folgendermaßen berechnen können:

$$\frac{\alpha}{\omega} = \frac{2}{\pi} \frac{W_{\infty}}{V_0} \quad \dots \quad (2).$$

Hierin sind  $W_{\infty}$  die Anströmungsgeschwindigkeit und  $V_0 = \omega R$  die Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe.

Zur Lösung unserer Aufgabe benutzen wir das von Th. von Kármán [2] erstmalig angegebene Impulsverfahren. Da wir die uns interessierenden Formeln bereits in [1] abgeleitet haben, erübrigt es sich, hier im einzelnen näher darauf einzugehen. Wir erhalten danach zwei Impulsgleichungen, und zwar eine für die radiale Richtung und eine andere für die Umfangsrichtung. Wir entnehmen aus [1], Gl. (15), die Impulsgleichung für die radiale Richtung wie folgt:

$$\frac{d}{dr} \left\{ r \int_0^{\delta} u (U - u) dz \right\} + r \frac{dU}{dr} \int_0^{\delta} (U - u) dz + \int_0^{\delta} v^2 dz = r \frac{\tau_r}{\rho} \quad \dots \quad (3).$$

Entsprechend gilt für die Impulsgleichung für die Umfangsrichtung nach [1], Gl. (17),

$$\frac{d}{dr} \left\{ r^2 \int_0^{\delta} u v dz \right\} = - r^2 \frac{\tau_{\varphi}}{\rho} \quad \dots \quad (4).$$

Die obere Integrationsgrenze haben wir nicht mit  $z = \infty$  sondern mit  $z = \delta$  angegeben, wobei  $\delta$  die Grenzschichtdicke ist. Dieses ist zulässig, da die Integranden für  $z \geq \delta$  verschwinden. Um dieses einzusehen, seien die Randbedingungen für die Geschwindigkeitskomponenten noch einmal angeschrieben:

$$\left. \begin{aligned} z = 0 : u = 0; \quad v = v_0 = r\omega; \quad w = 0 \\ z \geq \delta : u = U = \alpha r; \quad v = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (5).$$

Um mit den beiden Impulsgleichungen (3) und (4) arbeiten zu können, müssen geeignete Ansätze sowohl für die Geschwindigkeitsverteilungen  $u(r, z)$  und  $v(r, z)$  als auch für die Wand Schubspannungen  $\tau_r(r)$  und  $\tau_{\varphi}(r)$  gemacht werden, worüber im nächsten Abschnitt berichtet wird.

### 3. Näherungsansätze für die Geschwindigkeitsverteilungen und Wandschubspannungen

#### a) Geschwindigkeitsverteilungen

Nehmen wir an, daß wir es mit affinen Geschwindigkeitsverteilungen zu tun haben, so können wir allgemein schreiben

$$u = r f\left(\frac{z}{\delta}\right) = r f(t) \quad \text{und} \quad v = r g\left(\frac{z}{\delta}\right) = r g(t) \quad \dots \quad (6)$$

mit den Randbedingungen

$$t = 0 : f = 0; \quad g = \omega \quad \text{und} \quad t = 1 : f = \alpha; \quad g = 0.$$

Wir haben gesetzt  $t = \frac{z}{\delta}$ .

Die lineare Abhängigkeit in  $r$  folgt daraus, daß einmal die vorgegebene Geschwindigkeitskomponente in radialer Richtung  $U = \alpha r$  und zum anderen die vorgegebene Umfangsgeschwindigkeit  $\omega r$  linear von  $r$  abhängen. Die Gl. (6) stimmt auch mit dem Ansatz von Th. von Kármán [2] für den Fall der in ruhender Flüssigkeit sich drehenden Scheibe überein.

Die Abhängigkeit der Geschwindigkeitskomponenten von  $z$  bestimmen wir unter Beachtung der Verhältnisse an einer längsangeströmten ebenen Platte. Wird eine Platte mit der Geschwindigkeit  $U_{\infty}$  längsangeströmt, dann gilt für die Geschwindigkeitsverteilung in der Reibungsschicht das bekannte Potenzgesetz

$$\frac{u_{\infty}}{U_{\infty}} = \left(\frac{z}{\delta}\right)^m = t^m \quad \dots \quad (7).$$

Hierin hat der Exponent  $m$  je nach der Reynoldsschen Zahl und der Wandrauhigkeit Werte in der Größenordnung  $1/6$  bis  $1/10$ . Als brauchbarer Wert wird gewöhnlich  $m = 1/7$  angenommen.

Wenden wir das Gesetz (7) sinngemäß auf die Umfangsgeschwindigkeit an, dann muß von der an der Wand bereits herrschenden Geschwindigkeitskomponente  $v_0 = \omega r$  eine durch die Reibung bedingte Geschwindigkeitsabnahme erfolgen. Nehmen wir die „Anströmungsgeschwindigkeit der Platte“ mit  $U_\infty = \omega r$  an, dann wird

$$\frac{v}{\omega r} = 1 - \left(\frac{z}{\delta}\right)^m, \quad g = \omega (1 - t^m) \quad \dots \dots \dots (8).$$

Für die Geschwindigkeitskomponente in radialer Richtung wollen wir annehmen, daß das Potenzgesetz (7) in Wandnähe ( $z \rightarrow 0$ ) gültig ist. Außerdem sind noch die Randbedingungen (5) zu erfüllen. Mit einem zunächst unbekannten Faktor  $\alpha$  können wir dann schreiben

$$\frac{u}{\omega r} = \left(\frac{z}{\delta}\right)^m \left[ \alpha - \left( \alpha - \frac{a}{\omega} \right) \frac{z}{\delta} \right], \quad f = [\omega \alpha (1 - t) + a t] t^m \quad \dots \dots \dots (9).$$

Während (8) unmittelbar mit dem von K á r m á n schen Ansatz übereinstimmt, gilt dieses für (9), wenn darin  $a = 0$  gesetzt wird.

#### b) Wandschubspannungen

Bei der Aufstellung der Formeln für die Wandschubspannungen gehen wir entsprechend dem Vorschlag von Th. von K á r m á n [2] vor, indem wir zunächst die resultierende Wandschubspannung ermitteln.

Bezeichnen wir mit  $u_0$  die resultierende Geschwindigkeit in Wandnähe, dann gilt für die Geschwindigkeitsverteilung für kleine Wandabstände  $z$  die bekannte Formel

$$\frac{u_0}{u_0^*} = c \left( \frac{u_0^* z}{\nu} \right)^m \quad \dots \dots \dots (10),$$

wobei

$$u_0^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad \dots \dots \dots (11)$$

die sogenannte Schubspannungsgeschwindigkeit ist.  $c = c(m)$  ist eine von  $m$  abhängige Konstante, deren Zahlenwerte man z. B. in [3], S. 366, findet. Für  $m = 1/7$  ist  $c = 8,74$ . Die die resultierende Wandschubspannung bestimmende Geschwindigkeit ergibt sich aus den beiden Geschwindigkeitskomponenten zu

$$u_0 = \sqrt{u^2 + (v - \omega r)^2} \quad \dots \dots \dots (12),$$

wobei für  $u$  und  $v$  die Werte aus (8) und (9) einzusetzen sind. Da wir uns auf wandnahe Punkte beschränken ( $z \rightarrow 0$ ), können wir schreiben

$$\frac{u}{\omega r} = \alpha \left(\frac{z}{\delta}\right)^m \quad \text{und} \quad \frac{v - \omega r}{\omega r} = - \left(\frac{z}{\delta}\right)^m \quad \dots \dots \dots (13).$$

Setzen wir in (12) ein, dann wird

$$\frac{u_0}{\omega r} = (1 + \alpha^2)^{1/2} \left(\frac{z}{\delta}\right)^m \quad \dots \dots \dots (14).$$

Wir fassen jetzt (10), (11) und (14) zusammen und erhalten für die resultierende Wandschubspannung

$$\frac{\tau_0}{\rho} = k (1 + \alpha^2)^{1/2} \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{2m}{1+m}} (\omega r)^{\frac{2}{1+m}} \quad \dots \dots \dots (15).$$

Zur Abkürzung haben wir gesetzt

$$k = c^{-\frac{2}{1+m}} \quad \dots \dots \dots (16);$$

und zwar gilt für  $m = \frac{1}{7}$ ,  $k = 0,0225$ .

Die Komponenten der Wandschubspannung in radialer Richtung und Umfangsrichtung ergeben sich in einfacher Weise zu

$$\tau_r = \frac{u}{u_0} \tau_0 \quad \text{und} \quad \tau_\varphi = \frac{v - \omega r}{u_0} \tau_0 \quad \dots \dots \dots (17).$$

Setzen wir die Beziehungen (13), (14) und (15) ein, dann finden wir schließlich

$$\frac{\tau_r}{\varrho(\omega r)^2} = \frac{k}{\left(\frac{\omega r \delta}{\nu}\right)^n} \alpha (1 + \alpha^2)^{\frac{1-n}{2}} \quad (18),$$

$$\frac{\tau_\varphi}{\varrho(\omega r)^2} = -\frac{k}{\left(\frac{\omega r \delta}{\nu}\right)^n} (1 + \alpha^2)^{\frac{1-n}{2}} \quad (19)$$

Der Einfachheit halber haben wir den neuen Exponenten  $n$  eingeführt, der sich aus  $m$  folgendermaßen berechnet:

$$n = \frac{2m}{1+m} \quad \text{bzw.} \quad m = \frac{n}{2-n} \quad (20).$$

Für  $m = \frac{1}{7}$  ergibt sich  $n = \frac{1}{4}$ .

Wie man sofort sieht, besteht zwischen den Komponenten der Wandschubspannung die Beziehung

$$\tau_r = -\alpha \tau_\varphi \quad (21).$$

#### 4. Rechenverfahren

##### a) Grundlagen

Die Ergebnisse des Abschnittes 3 setzen wir in die Impulsgleichungen (3) und (4) des Abschnittes 2 ein.

Mit  $\frac{z}{\delta} = t$  ergeben sich nach kurzer Zwischenrechnung die Impulsgleichung für die radiale Richtung zu

$$\left(\frac{\delta}{r}\right) \left[ \frac{d\delta}{dr} \int_0^1 f(a-f) dt + \frac{\delta}{r} \int_0^1 (a^2 + 2af - 3f^2 + g^2) dt \right] = k \left(\frac{\omega r^2}{\nu}\right)^{-n} \alpha (1 + \alpha^2)^{\frac{1-n}{2}} \omega^2 \quad (22)$$

und die Impulsgleichung für die Umfangsrichtung zu

$$\left(\frac{\delta}{r}\right)^n \left(\frac{d\delta}{dr} + 4\frac{\delta}{r}\right) \int_0^1 f g dt = k \left(\frac{\omega r^2}{\nu}\right)^{-n} (1 + \alpha^2)^{\frac{1-n}{2}} \omega^2 \quad (23).$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich noch erheblich vereinfachen, wenn wir die Substitution

$$\frac{\delta}{r} = \beta \left(\frac{\omega r^2}{\nu}\right)^{-\frac{n}{1+n}} \quad (24)$$

vornehmen. Setzen wir in (22) und (23) ein, dann erhalten wir

$$k \alpha (1 + \alpha^2)^{\frac{1-n}{2}} \beta^{-(1+n)} = \Phi_r(a, \omega, n, \alpha) \quad (25)$$

und

$$k (1 + \alpha^2)^{\frac{1-n}{2}} \beta^{-(1+n)} = \Phi_\varphi(a, \omega, n, \alpha) \quad (26)$$

wobei wir als neue Abkürzungen eingeführt haben

$$\left. \begin{aligned} \Phi_r(a, \omega, n, \alpha) &= \frac{1}{\omega^2} \int_0^1 \left( a^2 + \frac{3+n}{1+n} a f - 2 \frac{2+n}{1+n} f^2 + g^2 \right) dt \\ \Phi_\varphi(a, \omega, n, \alpha) &= \frac{1}{\omega^2} \frac{5+3n}{1+n} \int_0^1 f g dt \end{aligned} \right\} \quad (27).$$

Die Größen  $\alpha$  und  $\beta$  stellen die beiden Unbekannten unseres Problems dar.

Zwischen (25) und (26) besteht noch die einfache Beziehung

$$\alpha \Phi_\varphi(a, \omega, n, \alpha) = \Phi_r(a, \omega, n, \alpha) \quad (28).$$

Die Funktionen  $\Phi_r$  und  $\Phi_\varphi$  lassen sich unter Berücksichtigung der Ansätze für die Geschwindigkeitsverteilungen  $f$  und  $g$  nach (9) und (8) elementar auswerten. Tabelle 1 gibt eine Zusammenstellung dieser Auswertung.

Tabelle 1: Konstanten zur Berechnung der Funktionen  $\Phi_r$  und  $\Phi_\varphi$  nach (27)

		allgemein	$m = \frac{1}{7}; n = \frac{1}{4}$
$\int_0^1 f dt$	$A \omega \alpha + B a$	$A = \frac{1}{(1+m)(2+m)}$	0,408
		$B = \frac{1}{2+m}$	0,466
$\int_0^1 f^2 dt$	$C \omega^2 \alpha^2 + D a \omega \alpha + E a^2$	$C = \frac{1}{(1+m)(1+2m)(3+2m)}$	0,207
		$D = \frac{1}{(1+m)(3+2m)}$	0,266
		$E = \frac{1}{3+2m}$	0,304
$\int_0^1 g^2 dt$	$F \omega^2$	$F = \frac{2m^2}{(1+m)(1+2m)}$	0,0278
$\int_0^1 fg dt$	$G \omega^2 \alpha + H a \omega$	$G = \frac{3m}{2(1+m)(1+2m)(2+m)}$	0,0681
		$H = \frac{m}{2(1+m)(2+m)}$	0,0292
$\frac{3+n}{1+n}$	$J$	Um die Abhängigkeit von $m$ zu erhalten, ist zu setzen $n = \frac{2m}{1+m}$	2,60
$2 \frac{2+n}{1+n}$	$K$		3,60
$\frac{5+3n}{1+n}$	$L$		4,60

Setzen wir die gefundenen Formeln in (27) ein, dann erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \Phi_r &= (1 + BJ - EK) \left( \frac{a}{\omega} \right)^2 + F - (DK - AJ) \frac{a}{\omega} \alpha - CK \alpha^2 \\ \Phi_\varphi &= HL \frac{a}{\omega} + GL \alpha \end{aligned} \right\} \dots (27a).$$

Die Größe  $\alpha$  berechnen wir aus Gl. (28), in die wir die Beziehungen (27a) einsetzen. Wir erhalten

$$\alpha^2 + R \frac{a}{\omega} \alpha = S + T \left( \frac{a}{\omega} \right)^2 \dots (29).$$

Die Formeln und Werte für  $R$ ,  $S$  und  $T$  gehen aus Tabelle 2 hervor.

Die Lösung der quadratischen Gleichung für  $\alpha$  liefert dann die gesuchte erste Unbekannte

$$\alpha = \sqrt{X + Y \left( \frac{a}{\omega} \right)^2} - Z \frac{a}{\omega} \dots (29a).$$

Die Bedeutung der Größen  $X$ ,  $Y$  und  $Z$ , sowie ihre Zahlenwerte sind in Tabelle 2 mitgeteilt. Da  $\alpha$  aufgrund des Geschwindigkeitsansatzes (9) positiv sein muß, ist die Wurzel mit positivem Vorzeichen zu versehen.

Die zweite Unbekannte  $\beta$ , die nach (24) unmittelbar mit der Grenzschiebtdicke zusammenhängt, ermitteln wir aus (26), wenn wir für  $\Phi_\varphi$  den Ausdruck (27a) einsetzen:

$$\beta = \left( \frac{\omega r^2}{\nu} \right)^{\frac{n}{1+n}} \frac{\delta}{r} = j \left[ \frac{(1 + \alpha^2)^{\frac{1-n}{2}}}{M \frac{a}{\omega} + N \alpha} \right]^{\frac{1}{1+n}} \dots (30).$$

Die Bedeutung der neuen Größen  $j$ ,  $M$  und  $N$  und ihre Zahlenwerte gehen wieder aus Tabelle 2 hervor.

Tabelle 2: Konstanten zur Berechnung der Größen  $\alpha, \alpha^*$ , der Grenzschichtdicke  $\delta$ , der Wandschubspannung und des Drehmomentenbeiwertes

	allgemein	$m = \frac{1}{7}; \quad n = \frac{1}{4}$
$R$	$\frac{DK - AJ + HL}{CK + GL}$	0,0294
$S$	$\frac{F}{CK + GL}$	0,0262
$T$	$\frac{1 + BJ - EK}{CK + GL}$	1,0557
$X$	$S$	0,0262
$Y$	$\left(\frac{R}{2}\right)^2 + T$	1,0559
$Z$	$\frac{R}{2}$	0,0147
$M$	$HL$	0,1342
$N$	$GL$	0,3131
$P$	$[M + N(\sqrt{Y} - Z)]^{\frac{n}{1+n}} (\sqrt{Y} - Z)^{\frac{1-n}{1+n}}$	0,861
$j$	$k^{\frac{1}{1+n}} = c^{\frac{2-n}{1+n}}$	0,0481

Mit der Aufstellung der Formeln zur Berechnung der Größen  $\alpha$  und  $\beta$  ist das Grundsätzliche unserer Aufgabe gelöst worden. Im Abschnitt 5 wollen wir einige Fälle für verschiedene Werte von  $a/\omega$  durchrechnen. Ähnlich wie beim laminaren Fall, vgl. [1], wollen wir dabei die beiden Fälle  $\omega \geq a$  und  $a \geq \omega$  unterscheiden.

Der Fall A ( $\omega \geq a$ ) schließt dabei den Fall  $a = 0$ , d. h. die rotierende Scheibe in ruhender Flüssigkeit, mit ein. Unsere Lösung ist hierfür mit derjenigen von Th. v. Kármán [2] identisch, wenn man  $m = \frac{1}{7}$  bzw.  $n = \frac{1}{4}$  setzt.

Der Fall B ( $a \geq \omega$ ) liefert für  $\omega = 0$  den Fall der stillstehenden angeblasenen Scheibe (rotationssymmetrische Staupunktströmung). Während wir für den Fall A unmittelbar die oben abgeleiteten Formeln (29a) und (30) anwenden können, empfiehlt es sich für den Fall B noch eine Umformung vorzunehmen. Mit

$$\alpha^* = \frac{\omega}{a} \alpha \quad \text{und} \quad \beta^* = \left(\frac{a}{\omega}\right)^{\frac{n}{1+n}} \beta \dots \dots \dots (31)$$

erhalten wir

$$\alpha^* = \sqrt{X \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 + Y} - Z \dots \dots \dots (32)$$

und

$$\beta^* = \left(\frac{a r^2}{\nu}\right)^{\frac{n}{1+n}} \frac{\delta}{r} = j \left[ \frac{\left[\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 + \alpha^{*2}\right]^{\frac{1-n}{2}}}{M + N \alpha^*} \right]^{\frac{1}{1+n}} \dots \dots \dots (33).$$

Für die Staupunktströmung ( $\omega = 0$ ) erhalten wir außer aus (33) noch eine zweite einfachere Lösung, wenn wir nur mit der Impulsgleichung für die radiale Richtung rechnen. Diese Lösung ergibt sich mit  $v = 0$  aus (3) zu

$$\frac{d}{dr} \left\{ r \int_0^\delta u (U - u) dz \right\} + r \frac{dU}{dr} \int_0^\delta (U - u) dz = r \frac{\tau_r}{\varrho} \dots \dots \dots (34)$$

Für die Geschwindigkeitsverteilung machen wir den Ansatz

$$\frac{u}{U} = f\left(\frac{z}{d}\right) = t^m.$$

Für die Wandschubspannung setzen wir analog den Überlegungen des Abschnittes 3b

$$\frac{\tau_r}{\rho (a r)^2} = \frac{k}{\left(\frac{a r \delta}{\nu}\right)^n}.$$

Setzen wir  $u$  und  $\tau_r$  in die Impulsgleichung ein, dann erhalten wir entsprechend (22)

$$\frac{d\delta}{dr} \int_0^1 t^m (1-t^m) dt + \frac{\delta}{r} \int_0^1 (1+2t^m-3t^{2m}) dt = \frac{k}{\left(\frac{a r \delta}{\nu}\right)^n}.$$

Führen wir die Integrationen aus, dann erhalten wir nach kurzer Zwischenrechnung die Lösung für die Grenzschichtdicke der Staupunktströmung zu

$$\beta_0^* = \left(\frac{a r^2}{\nu}\right)^{\frac{n}{1+n}} \frac{\delta}{r} = j \left(\frac{2}{n} \frac{1+n}{5-n}\right)^{\frac{1}{1+n}} \dots \dots \dots (35).$$

Nach dieser Zwischenbemerkung wenden wir uns jetzt der Ermittlung der anderen Grenzschichtgrößen zu.

#### b) Wandschubspannung und Drehmoment

Die Wandschubspannungen in beiden Richtungen  $\tau_r$  und  $\tau_\varphi$  berechnen wir nach (18) und (19). Setzen wir (30) ein, dann wird

$$\frac{\tau_r}{\rho (\omega r)^2} = j \alpha (1+\alpha^2)^{\frac{1-n}{2(1+n)}} \left(M \frac{a}{\omega} + N \alpha\right)^{\frac{n}{1+n}} \left(\frac{\omega r^2}{\nu}\right)^{-\frac{n}{1+n}} \dots \dots \dots (36),$$

$$\frac{\tau_\varphi}{\rho (\omega r)^2} = -j (1+\alpha^2)^{\frac{1-n}{2(1+n)}} \left(M \frac{a}{\omega} + N \alpha\right)^{\frac{n}{1+n}} \left(\frac{\omega r^2}{\nu}\right)^{-\frac{n}{1+n}} \dots \dots \dots (37).$$

Unter der Annahme, daß die Reibungsschichtdicke klein im Vergleich zum Scheibenradius  $R$  ist, können wir das Drehmoment einer einseitig benetzten Scheibe wie folgt berechnen:

$$M = -2\pi \int_0^R \tau_\varphi r^2 dr \dots \dots \dots (38).$$

Die Abhängigkeit der Wandschubspannung  $\tau_\varphi$  vom Radius  $r$  finden wir aus (37) zu

$$\frac{\tau_\varphi(r)}{\tau_\varphi(R)} = \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{2}{1+n}} \dots \dots \dots (39).$$

Führen wir den dimensionslosen Momentenbeiwert

$$c_M = \frac{M}{\frac{\rho}{2} \omega^2 R^5} \dots \dots \dots (40)$$

ein, dann ergibt sich nach Ausführen der Integration über  $r$

$$c_M = -4\pi \frac{1+n}{5+3n} \frac{\tau_\varphi(R)}{\rho (\omega R)^2} \dots \dots \dots (41).$$

Zur Auswertung dieser Formel ist die Wandschubspannung nach (37) für  $r = R$  einzusetzen. Für große Werte von  $a/\omega$  nimmt der Ausdruck (41) eine besonders einfache Form an.

Beachten wir, daß hierfür die Größe  $\alpha = \frac{a}{\omega} (\sqrt{Y} - Z) \gg 1$  wird, dann können wir schreiben

$$\frac{\tau_\varphi(R)}{\rho (\omega R)^2} = -j P \left(\frac{a}{\omega}\right)^{\frac{1}{1+n}} \left(\frac{\omega R^2}{\nu}\right)^{-\frac{n}{1+n}} \dots \dots \dots (42),$$

wobei die Formel und der Zahlenwert für  $P$  in Tabelle 2 angegeben worden sind.

Wir setzen in (41) ein und erhalten für den Momentenbeiwert bei großen Werten von  $a/\omega$  den Ausdruck

$$c_M = 4\pi j \frac{1+n}{5+3n} P \frac{\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^{\frac{1}{1+n}}}{\left(\frac{\omega R^2}{\nu}\right)^{\frac{n}{1+n}}} \quad (\omega \ll a) \quad \dots \quad (43).$$

Auf eine Besprechung der in diesem Abschnitt abgeleiteten Formeln wird im folgenden Abschnitt eingegangen, in dem wir einige Beispiele durchgerechnet haben. Für  $m = \frac{1}{7}$  bzw.  $n = \frac{1}{4}$  haben wir in Tabelle 3 sämtliche Endformeln noch einmal zusammengestellt.

Tabelle 3. Zusammenstellung der Formeln zur Berechnung der Grenzschichtgrößen für  $n = \frac{1}{4}$

Fall A $(\omega \geq a)$ ; $p = \frac{a}{\omega}$	
$\alpha$	$\sqrt{0,0262 + 1,0559 p^2 - 0,0147 p}$
$\sqrt[5]{\frac{\omega r^2}{\nu}} \frac{\delta}{r}$	$0,0481 \frac{(1 + \alpha^2)^{0,3}}{(0,1342 p + 0,3131 \alpha)^{0,8}}$
$\sqrt[5]{\frac{\omega r^2}{\nu}} \frac{\tau_r}{\varrho (\omega r)^2}$	$0,0481 \alpha (1 + \alpha^2)^{0,3} (0,1342 p + 0,3131 \alpha)^{0,2}$
$\sqrt[5]{\frac{\omega r^2}{\nu}} \frac{\tau_\varphi}{\varrho (\omega r)^2}$	$-0,0481 (1 + \alpha^2)^{0,3} (0,1342 p + 0,3131 \alpha)^{0,2}$
$\sqrt[5]{\frac{\omega R^2}{\nu}} c_M$	$-2,7318 \sqrt[5]{\frac{\omega r^2}{\nu}} \frac{\tau_\varphi}{\varrho (\omega r)^2}$
Fall B $(a \geq \omega)$ ; $q = \frac{\omega}{a}$	
$\alpha^*$	$\sqrt{0,0262 q^2 + 1,0559 - 0,0147}$
$\sqrt[5]{\frac{a r^2}{\nu}} \frac{\delta}{r}$	$0,0481 \frac{(q^2 + \alpha^{*2})^{0,3}}{(0,1342 + 0,3131 \alpha^*)^{0,8}}$
$\sqrt[5]{\frac{a r^2}{\nu}} \frac{\tau_r}{\varrho (a r)^2}$	$0,0481 \alpha^* (q^2 + \alpha^{*2})^{0,3} (0,1342 + 0,3131 \alpha^*)^{0,2}$
$\sqrt[5]{\frac{a r^2}{\nu}} \frac{\tau_\varphi}{\varrho (a r)^2}$	$-0,0481 q (q^2 + \alpha^{*2})^{0,3} (0,1342 + 0,3131 \alpha^*)^{0,2}$
$\sqrt[5]{\frac{\omega R^2}{\nu}} c_M$	$-2,7318 \left(\frac{a}{\omega}\right)^{1,8} \cdot \sqrt[5]{\frac{a r^2}{\nu}} \frac{\tau_\varphi}{\varrho (a r)^2}$

### 5. Ergebnisse

Mit den Formeln der Tabelle 3  $\left(n = \frac{1}{4}\right)$  haben wir für die Werte  $p = \frac{a}{\omega} = 0; \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$  und 1, sowie  $q = \frac{\omega}{a} = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$  und 1 die Grenzschichtgrößen ermittelt. Die Werte haben wir in Tabelle 4 angegeben und in den Abbildungen 2 bis 6 graphisch dargestellt.

#### a) Grenzschichtdicke (Bild 2)

Hält man die Winkelgeschwindigkeit fest, dann nimmt die Grenzschichtdicke (obere Kurve) sehr schnell mit wachsender Anströmungsgeschwindigkeit ab. Der Ordinatenwert für

$a/\omega = 0$  (rotierende Scheibe in ruhender Flüssigkeit) ist zu 0,526 berechnet worden, während Th. von Kármán [2] 0,462 angibt. Der letzte Wert beruht aber auf einem Rechenfehler, wie man leicht zeigen kann. Der richtige Wert ist übrigens auch von H. Schlichting [3] schon angegeben worden.

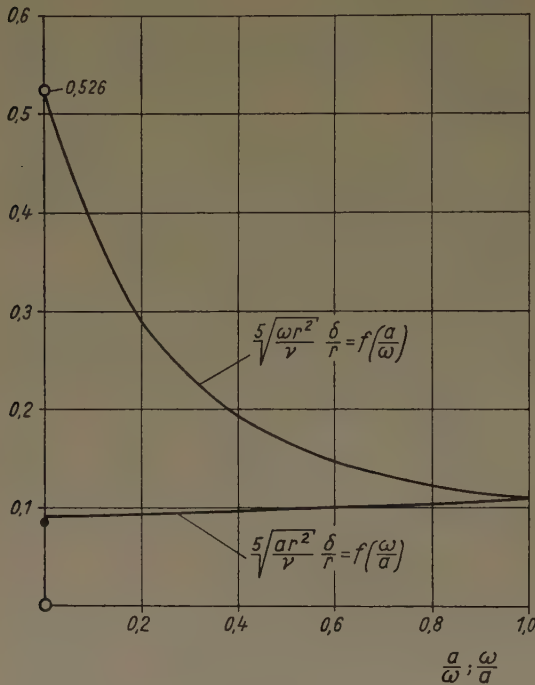


Bild 2. Grenzschichtdicke  $\delta$ ; • = Wert entsprechend (35)

Der Ordinatenwert für  $\omega/a = 0$  (rotationssymmetrische Staupunktströmung) beträgt 0,0419, während sich nach der Lösung nach (35) 0,0414 ergibt. Die Übereinstimmung beider Wert

Hält man dagegen die Anströmungsgeschwindigkeit konstant, dann ändert sich die Grenzschichtdicke (untere Kurve) nur wenig mit  $\omega$ . Der Ordinatenwert für  $\omega/a = 0$  (rotationssymmetrische Staupunktströmung) ist zu 0,092 berechnet worden, während man für die Lösung nach (35) 0,086 findet. Die Übereinstimmung ist recht zufriedenstellend.

### b) Wandschubspannung (Bild 3 und 4)

Bei festgehaltener Winkelgeschwindigkeit nehmen beide Schubspannungskomponenten (untere Kurve in Bild 3 und obere Kurve in Bild 4) mit wachsender Anströmungsgeschwindigkeit beträchtlich zu. Ebenfalls wächst bei konstanter Anströmungsgeschwindigkeit die Schubspannungskomponente in Umfangsrichtung (untere Kurve in Bild 4) sehr schnell mit wachsender Drehgeschwindigkeit, während sich die Schubspannungskomponente in radialer Richtung (obere Kurve in Bild 3) nur wenig mit der Drehzahl ändert.

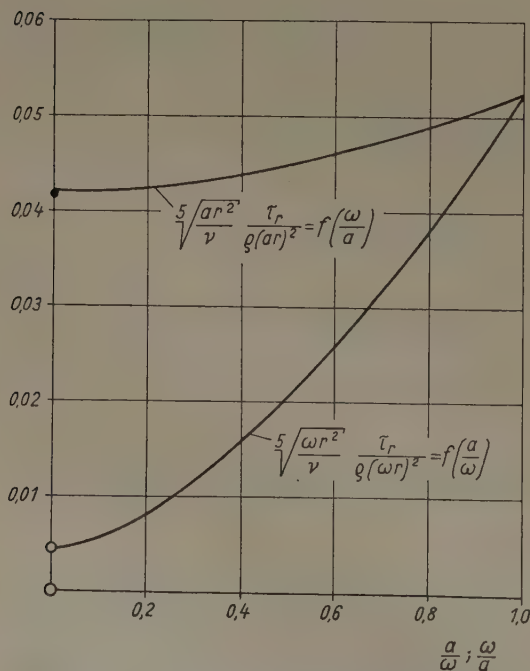


Bild 3. Wandschubspannung in radialer Richtung  $\tau_r$   
• = Wert entsprechend (35)

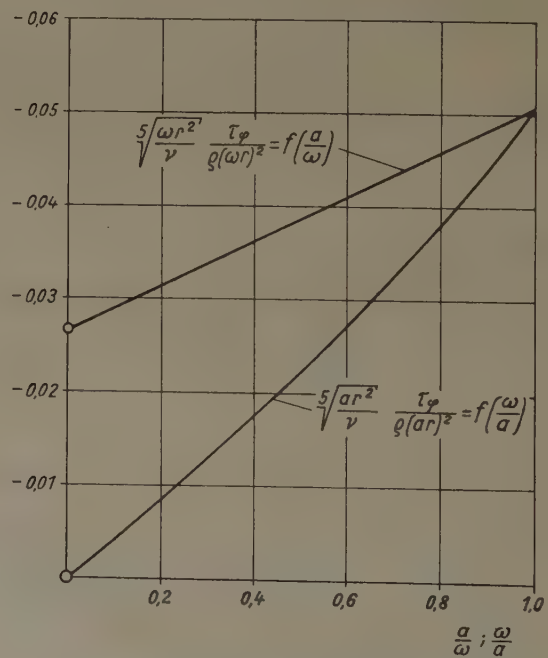


Bild 4. Wandschubspannung in Umfangsrichtung  $\tau_\varphi$

ist sehr gut. Wir haben damit gezeigt, daß wir mit unserem Verfahren, den gesamten Bereich der stillstehenden angeblasenen Scheibe bis zur nicht angeblasenen rotierenden Scheibe erfassen können.

### c) Drehmoment (Bild 5 und 6)

In Bild 5 haben wir über dem Parameter  $\frac{a}{\omega}$  den Drehmomentenbeiwert  $\sqrt[5]{\frac{\omega R^2}{\nu}} c_M$  der einseitig benetzten Scheibe aufgetragen. Man sieht, daß bei konstant gehaltener Winkelgeschwindigkeit das Drehmoment mit wachsender Anströmungsgeschwindigkeit sehr schnell zunimmt. Für große Werte von  $a/\omega$  ( $\omega \ll a$ ) errechnet sich die Änderung aus (43) zu

$$c_M = \frac{0,113}{\sqrt[5]{\frac{\omega R^2}{\nu}}} \left(\frac{a}{\omega}\right)^{0,8} \quad (\text{turbulent}) \quad (44).$$

Im laminaren Fall (vgl. [1] Gl. (49a)) hatten wir eine schwächere Änderung mit  $a/\omega$  gefunden, nämlich

$$c_M = \frac{3,17}{\sqrt[5]{\frac{\omega R^2}{\nu}}} \sqrt{\frac{a}{\omega}} \quad (\text{laminar}) \quad (45).$$

Schließen wir auch den Bereich kleiner Werte von  $a/\omega$  in unsere Betrachtungen mit ein, dann können wir in guter Näherung annehmen, daß sich das Drehmoment linear mit der Anströmungsgeschwindigkeit ändert.

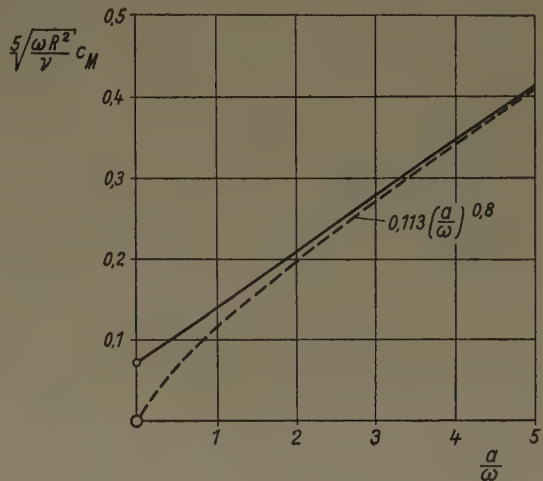


Bild 5. Drehmomentenbeiwert  $c_M = M / \frac{\rho}{2} \omega^3 R^3 = f\left(\frac{a}{\omega}\right)$

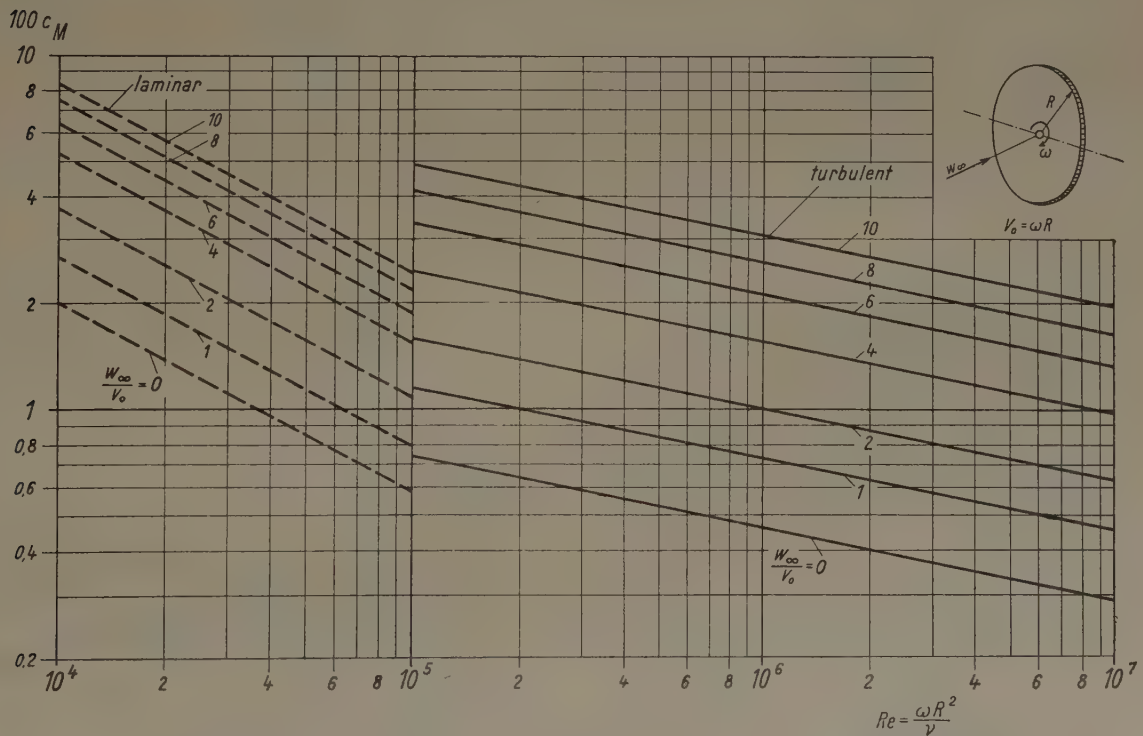


Bild 6. Drehmomentenbeiwert der einseitig benetzten rotierenden Scheibe  $c_M = M / \frac{\rho}{2} \omega^3 R^3$

Für die in ruhender Flüssigkeit rotierende Scheibe gilt in Übereinstimmung mit von K á r m á n [2]

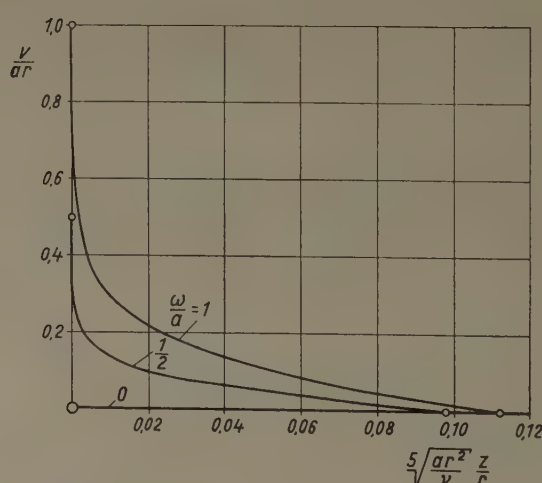
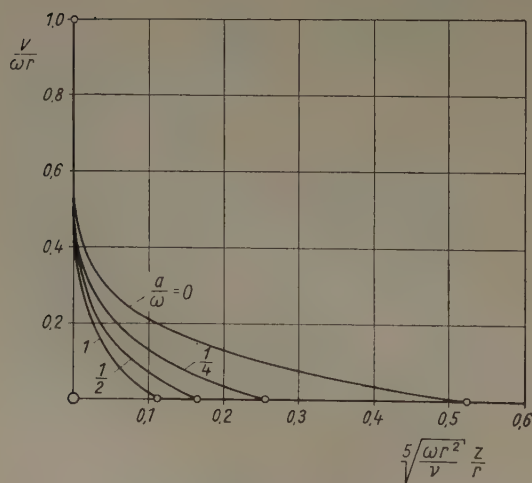
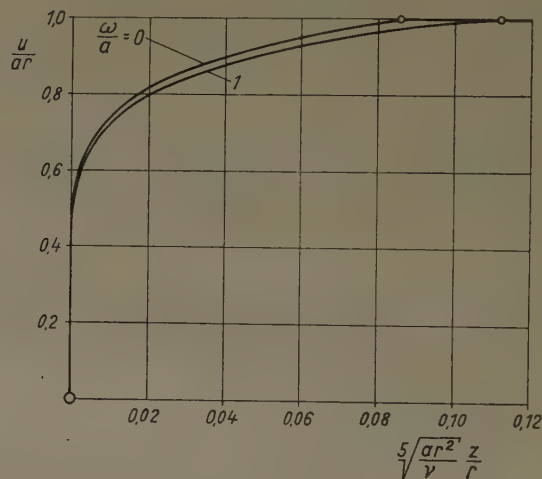
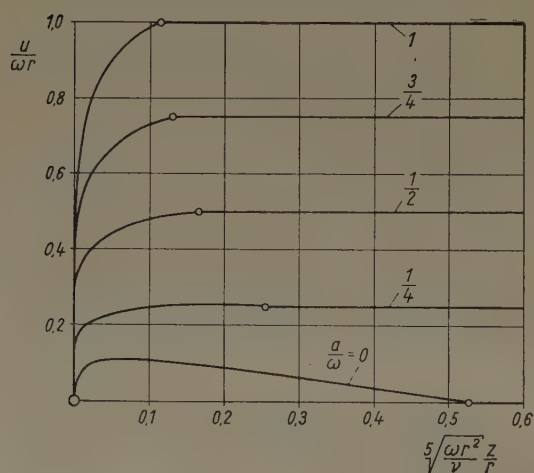
$$c_{M0} = \frac{0,073}{\sqrt[5]{\frac{\omega R^2}{\nu}}} \quad (\text{turbulent}) \quad (46),$$

Tabelle 4: Zusammenstellung der Ergebnisse für  $n = \frac{1}{4}$ 

Fall A	$p = \frac{a}{\omega}$	$q = \frac{\omega}{a}$	$\alpha$	$\sqrt[5]{\frac{\omega r^2}{\nu} \frac{\delta}{r}}$	$\sqrt[5]{\frac{\omega r^2}{\nu} \frac{\tau_r}{\varrho (\omega r)^2}}$	$-\sqrt[5]{\frac{\omega r^2}{\nu} \frac{\tau_\varphi}{\varrho (\omega r)^2}}$	$\sqrt[5]{\frac{\omega R^2}{\nu} c_M}$
	0	$\infty$	0,1618	0,526	0,0043	0,0266	0,073
	1/4	4	0,2999	0,256	0,0098	0,0326	0,089
	1/2	2	0,5314	0,166	0,0206	0,0388	0,106
	3/4	4/3	0,7765	0,130	0,0347	0,0446	0,122
	1	1	1,0255	0,112	0,0524	0,0511	0,140

Fall B	$p = \frac{a}{\omega}$	$q = \frac{\omega}{a}$	$\alpha^*$	$\sqrt[5]{\frac{a r^2}{\nu} \frac{\delta}{r}}$	$\sqrt[5]{\frac{a r^2}{\nu} \frac{\tau_r}{\varrho (a r)^2}}$	$-\sqrt[5]{\frac{a r^2}{\nu} \frac{\tau_\varphi}{\varrho (a r)^2}}$	$\sqrt[5]{\frac{\omega R^2}{\nu} c_M}$
	1	1	1,0255	0,112	0,0524	0,0511	0,140
	4/3	3/4	1,0199	0,104	0,0480	0,0351	0,162
	2	1/2	1,0161	0,098	0,0451	0,0222	0,211
	4	1/4	1,0136	0,093	0,0426	0,0105	0,348
	$\infty$	0	1,0129	0,092	0,0419	0	$\infty^2$ )

Bild 7. Geschwindigkeitsverteilungen Fall A,  $\omega \geq a$   $\bigcirc = z = \delta$ Bild 8. Geschwindigkeitsverteilungen Fall B;  $a \geq \omega$   $\bigcirc = z = \delta$ 

während sich im laminaren Fall

$$c_{M0} = \frac{1,74}{\sqrt{\frac{\omega R^2}{\nu}}} \quad (\text{laminar}) \quad \dots \quad (47)$$

nach unserer Näherung, vgl. [1], ergibt<sup>3)</sup>.<sup>2)</sup> Asymptote: 0,113 ( $a/\omega$ )<sup>0,8</sup><sup>3)</sup> Der exakte Wert nach Cochran ist 1,935 statt 1,74.

Um die Ergebnisse des Bildes 5 für das Drehmoment in bequemer Weise auf die angeströmte Scheibe vom Radius  $R$  anwenden zu können, wollen wir noch die Größe  $a/\omega$  gemäß (2) durch das Verhältnis aus der Anströmungsgeschwindigkeit  $W_\infty$  zur Umfangsgeschwindigkeit  $V_0 = \omega R$  ausdrücken. Damit wird aus (44) für die asymptotische Lösung

$$c_M = \frac{0,079}{\sqrt[5]{\frac{\omega R^2}{\nu}}} \left( \frac{W_\infty}{\omega R} \right)^{0,8} \dots \dots \dots (48).$$

In Bild 6 haben wir den Momentenbeiwert über der Reynoldschen Zahl  $\omega R^2/\nu$  mit  $W_\infty/V_0$  als Parameter aufgetragen. Miteingezeichnet sind zum Vergleich die entsprechenden Kurven des laminaren Falles nach [1].

Die aufgetragenen Kurven gelten für die einseitig benetzte Scheibe. Wenn wir näherungsweise annehmen, daß hinter der Scheibe infolge des Totwassers keine Geschwindigkeitskompo-

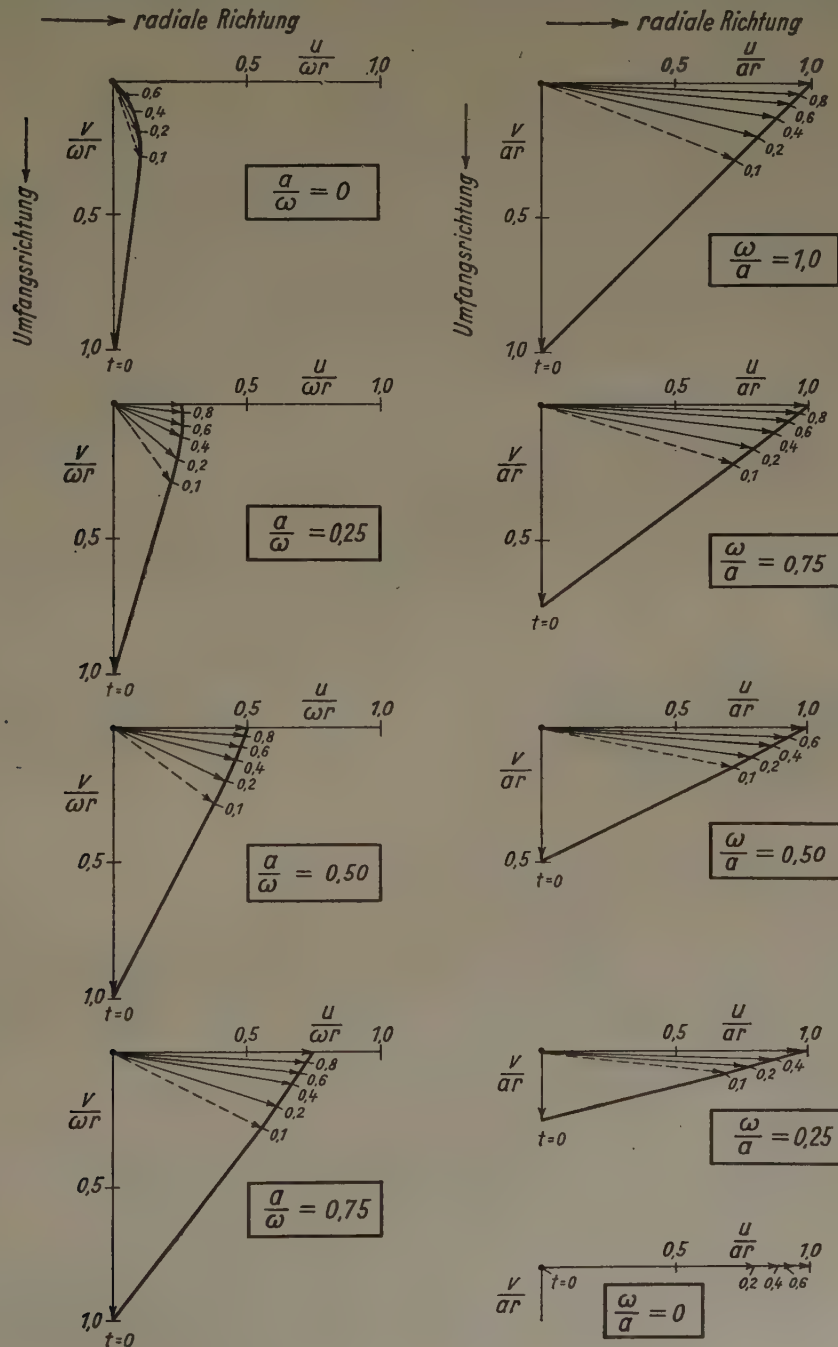


Bild 9. Polardiagramme der Geschwindigkeitsverteilungen;  $t = z/\delta$

Dans un espace Euclidien  $p$ -dimensionnel  $n$  vecteurs d'une longueur quelconque sont donnés. Leurs directions sont distribuées statistiquement avec probabilité égale. Le module de la somme est une variable aléatoire pour la distribution de laquelle, on donne une formule générale, valable pour toutes les valeurs positives, entières de  $p$  et  $n$  sous la forme d'une intégrale infinie de fonctions de Bessel. Sous certaines conditions, ces distributions, pour de grandes valeurs de  $n$ , se changent asymptotiquement en distributions connues de la statistique mathématique.

Пусть в  $p$ -мерном евклидовом пространстве дано  $n$  векторов любой, вначале, определенной длины, ориентации которых статистически распределены с равной вероятностью. Модуль суммирующего вектора является статистической величиной, для распределения которой выводится общая формула, действительная для всех положительных, целочисленных  $p$  и  $n$ , в виде несобственного интеграла по функциям Бесселя. При определенных условиях эти распределения асимптотически переходят для больших значений  $n$  в хорошо известные распределения математической статистики.

### 1. Einige einfache Beispiele für $p = 2$

Wir gehen aus von dem Sonderfall  $p = 2$ , dessen vollständige Erledigung wir an den Anfang stellen, und wählen als Beispiele  $n = 2, 3$  u. 4. Die zwei, bzw. drei u. vier Vektoren sollen außerdem gleiche Länge haben, die wir gleich 1 setzen können. Eine Vorstellung von den zu betrachtenden Wahrscheinlichkeiten bekommt man etwa, wenn man zwei bzw. drei oder vier Streichhölzer viele Male auf eine Tischplatte wirft, sie, entsprechend der durch den Kopf gekennzeichneten Richtungen, aneinanderfügt und das Verhältnis der Anzahl mit der Längen zwischen  $-1/2 dl + l$  und  $l + 1/2 dl$  aufgetreten sind zu der Gesamtzahl der Würfe über die Länge  $l$  aufträgt.

Da alle Richtungen der Vektoren gleiche Wahrscheinlichkeiten haben sollen, sind die entstehenden Konfigurationen für jedes  $n$  nur bis auf eine Drehung in der Ebene bestimmt, so daß man einen beliebigen Vektor als Bezugsrichtung herausgreifen kann und sich auf die relative Lage der anderen Vektoren zu ihm beschränken kann. Im Falle  $n = 2$  verbleibt dann nur noch ein Freiheitsgrad (s. Bild 1) und die Wahrscheinlichkeit, daß der zweite Vektor innerhalb des Winkelraums  $dq$  fällt, ist:

$$dF_{2,2} = \frac{1}{2\pi} dq \quad -\pi \leq q \leq \pi \text{ bzw. } dF_{2,2} = \frac{1}{\pi} dq \quad 0 \leq q \leq \pi \quad (1.1).$$

Mit

$$l = 2 \cos \frac{q}{2} \quad (1.2)$$

folgt:

$$dF_{2,2} = \frac{1}{\pi} \frac{dl}{\sqrt{1 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}} \quad (1.3)$$

also

$$F_{2,2}(l) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{l}{2} & 0 \leq l \leq 2 \\ 1 & l > 2 \end{cases} \quad (1.4)$$

mit der Frequenzfunktion

$$f_{2,2}(l) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{1 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}} & 0 \leq l < 2 \\ 0 & l > 2 \end{cases} \quad (1.5).$$

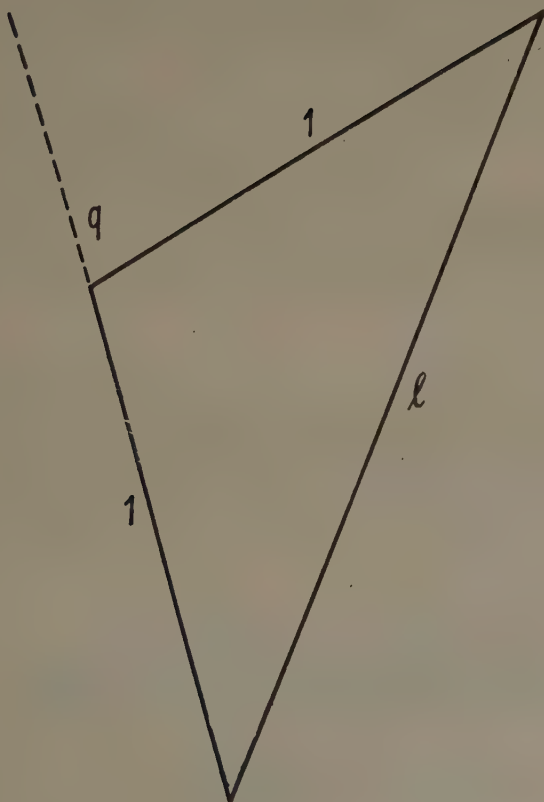


Bild 1

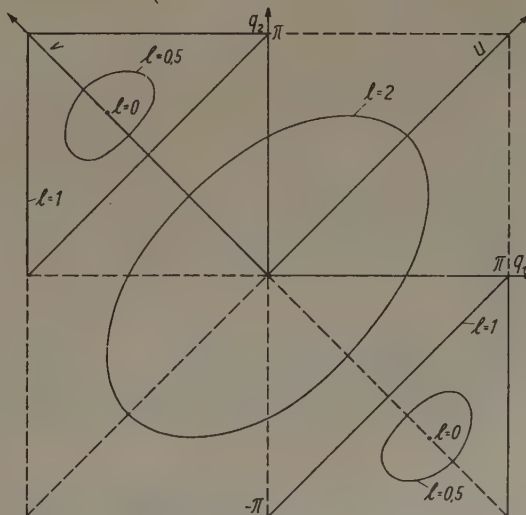


Bild 2

So einfach die Herleitung und das Resultat in diesem Falle ist, so ist es doch der Ausgangspunkt für die Ableitung der allgemeinen Formel, wie wir später sehen werden.

Beim zweiten Beispiel  $n = 3$  ist die direkte Berechnung der Verteilungsfunktion nicht mehr trivial, sondern bereits einigermaßen mühsam. Man hat:

$$F_{2,3} = \frac{1}{4\pi^2} \iint dq_1 dq_2 \dots \dots \dots (1.6)$$

mit

$$l^2 = 3 + 2[\cos q_1 + \cos q_2 + \cos(q_1 - q_2)] \dots \dots \dots (1.7).$$

Durch die Substitution:

$$q_1 = u - v; \quad q_2 = u + v \dots \dots \dots (1.8)$$

gehen (1.6) u. (1.7) über in:

$$F_{2,3} = \frac{1}{2\pi^2} \iint du dv; \quad l^2 = 1 + 4 \cos v (\cos u + \cos v) \dots \dots \dots (1.9)$$

und nach Ausführung einer Integration folgt:

$$F_{2,3}(l) = \begin{cases} \frac{2}{\pi^2} \int_{\arccos(-\frac{l+1}{2})}^{\arccos(\frac{l-1}{2})} \arccos \left[ \frac{l^2-1}{4 \cos v} - \cos v \right] dv & 0 \leq l \leq 1 \\ 1 - \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\arccos(\frac{l-1}{2})} \arccos \left[ \frac{l^2-1}{4 \cos v} - \cos v \right] dv & 1 \leq l \leq 3 \end{cases} \dots \dots (1.10).$$

Einen Überblick über die jeweiligen Integrationsbereiche  $l = \text{const}$  gibt Bild 2.

Wir übergehen hier die Einzelheiten der weiteren Rechnung, die auf vollständige elliptische Integrale erster Gattung führt und schreiben nur das Ergebnis an. Man erhält als Frequenzfunktion:

$$f_{2,3}(l) = \begin{cases} \frac{\sqrt{l}}{\pi^2} \cdot k \cdot K(k) & 0 \leq l < 1 \\ \frac{\sqrt{l}}{\pi^2} \cdot K(k) & 1 < l \leq 3 \\ 0 & l > 3 \end{cases} \dots \dots \dots (1.11),$$

wobei  $K(k)$  das vollständige elliptische Integral erster Gattung ist, und der Modul  $k$  als Funktion von  $l$ , sich wie folgt, berechnet:

$$k^2(l) = \begin{cases} \frac{16l}{(3-l)(1+l)^3} & 0 \leq l \leq 1 \\ \frac{(3-l)(1+l)^3}{16l} & 1 \leq l \leq 3 \end{cases} \dots \dots \dots (1.12).$$

Speziell gilt noch:

$$F_{2,3}(1) = \frac{1}{4}.$$

In ähnlicher Weise kann man im Falle  $n = 4$  bei der Aufgabe:

$$F_{2,4} = \frac{1}{8\pi^3} \iiint dq_1 \cdot dq_2 \cdot dq_3 \dots \dots \dots (1.13)$$

$$l^2 = 4 + 2[\cos q_1 + \cos q_2 + \cos q_3 + \cos(q_1 - q_2) + \cos(q_2 - q_3) + \cos(q_3 - q_1)]$$

vorgehen. Eine längere Rechnung führt zu dem Ergebnis:

$$f_{2,4}(l) = \begin{cases} \frac{l}{\pi^3} \left\{ \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{k(x) \cdot K[k(x)]}{\sqrt[4]{1+2lx+l^2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{K[k(x)]}{\sqrt[4]{1+2lx+l^2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right\} & 0 \leq l \leq 2 \\ -\frac{l}{2} + \frac{4}{l} & \\ \frac{l}{\pi^3} \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{K[k(x)]}{\sqrt[4]{1+2lx+l^2}} \cdot \frac{dx}{1-x^2} & 2 \leq l \leq 4 \end{cases} \dots \dots (1.14).$$

Es ist wieder  $K(k)$  das vollständige elliptische Integral erster Gattung und mit der Abkürzung  $\gamma = l^2 + 2lx$  gilt:

$$k^2 = \begin{cases} \frac{16\sqrt{1+\gamma}}{8+4\gamma-\gamma^2+8\sqrt{1+\gamma}} & -1 \leq \gamma \leq 0 \\ \frac{8\sqrt{1+\gamma}+8+4\gamma-\gamma^2}{16\sqrt{1+\gamma}} & 0 \leq \gamma \leq 8 \end{cases} \quad (1.15).$$

Wie man sieht, erhält man bereits für kleine  $n$ , recht verwickelte, aus höheren transzendenten Funktionen aufgebaute Ausdrücke für die Frequenzfunktionen, im Gegensatz zum Fall  $p = 3$ , wie wir sehen werden, und mit  $n = 4$  dürfte praktisch die Grenze für eine direkte Behandlung der Aufgabe:

$$\left. \begin{aligned} F_{2,n} &= \frac{1}{2^{n-1} \pi^{n-1}} \int \int \cdots \int dq_1 dq_2 \cdots dq_{n-1} \\ l^2 &= n + 2 [\cos q_1 + \cos q_2 + \cdots \cos q_{n-1} + \cos (q_1 - q_2) + \cdots] \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

gezogen sein.

## II. Der allgemeine Fall $p = 2$

Unser erstes Beispiel gibt aber die Möglichkeit eine Rekursionsformel aufzustellen, die sich allgemein lösen läßt. Wir verallgemeinern zu diesem Zweck das erste Beispiel auf den Fall beliebiger Länge der beiden Vektoren, die  $x$  und  $a_{n+1}$  seien. Die Verteilungsfunktion ist dann, wie man leicht nachrechnet:

$$f_{2,2}(x, a_{n+1}, l) = \begin{cases} 0 & l < |x - a_{n+1}| \\ \frac{2l}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{4x^2 a_{n+1}^2 - [a_{n+1}^2 + x^2 - l^2]^2}} & |x - a_{n+1}| < l < x + a_{n+1} \\ 0 & l > x + a_{n+1} \end{cases} \quad (2.1).$$

Es sei nun  $x$  die Länge des Summenvektors von  $n$  Vektoren mit der Frequenzfunktion  $f_{2,n}(x)$ , dann ist  $l$  die Länge des Summenvektors von  $n + 1$  Vektoren und nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt:

$$f_{2,n+1}(l) = \frac{2l}{\pi} \int_{|l-a_{n+1}|}^{l+a_{n+1}} \frac{f_{2,n}(x) \cdot dx}{\sqrt{4x^2 a_{n+1}^2 - [x^2 + a_{n+1}^2 - l^2]^2}} \quad (2.2).$$

Macht man in (2.2) die Substitution:

$$x^2 = l^2 + a_{n+1}^2 - 2a_{n+1} \cdot l \cdot \cos \vartheta \quad (2.3),$$

so werden die Grenzen des Integrals 0 und  $\pi$  und man erhält:

$$\frac{f_{n+1}(l)}{l} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f_n[R]}{R} d\vartheta \quad (2.4)$$

mit

$$R = \sqrt{a_{n+1}^2 + l^2 - 2a_{n+1} \cdot l \cos \vartheta} \quad (2.5).$$

Es gilt nun, eine Funktion zu finden, die ein auf  $R$  bezügliches Additionstheorem besitzt und das ist die Bessel'sche Funktion Nullter Ordnung  $J_0(R)$ . In der Tat erfüllt die Funktion:

$$f_{2,n}(l) = l \int_0^\infty \prod_{k=1}^n J_0(a_k t) \cdot J_0(l t) t dt \quad (2.6)$$

die Rekursionsformel (2.4) und stellt damit die allgemeine Formel für die Frequenzfunktionen von Summen ebener Vektoren dar, wenn wir noch zeigen, daß sie, z. B. für  $n = 2$ , Gl. (2.1) liefert. Aus dem Additionstheorem der Bessel'schen Funktion  $J_0(R)$  folgt nämlich:

$$\frac{l}{\pi} \int_0^\pi \left[ \int_0^\infty \prod_{k=1}^n J_0(a_k t) \cdot J_0(R t) t dt \right] d\vartheta = l \int_0^\infty \prod_{k=1}^{n+1} J_0(a_k t) J_0(l t) t dt \quad (2.7)$$

und für  $n = 2$  gilt speziell:

$$f_{2,2}(l) = l \int_0^\infty J_0(a_1 t) J_0(a_2 t) J_0(l t) t dt \dots \dots \dots (2.8)$$

Dieses Integral ist aber nach der Formel von Sonine u. Dougall<sup>1)</sup> gleich:

$$f_{2,2}(l) = \begin{cases} 0 & l < |a_1 - a_2| \\ 2l & |a_1 - a_2| < l < a_1 + a_2 \\ \pi \sqrt{4a_1^2 a_2^2 - (a_1^2 + a_2^2 - l^2)^2} & \\ 0 & l > a_1 + a_2 \end{cases} \dots \dots (2.9)$$

also identisch mit (2.1).

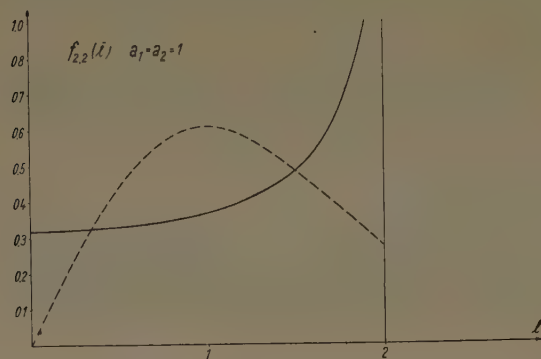


Bild 1

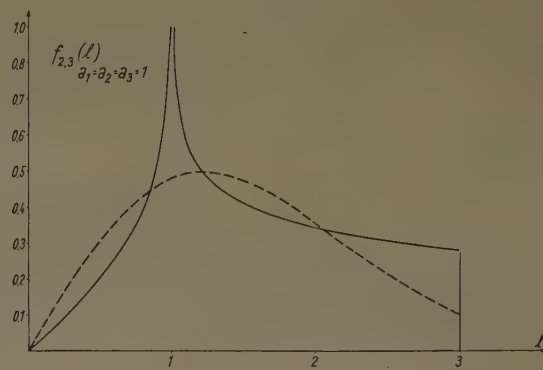


Bild 2

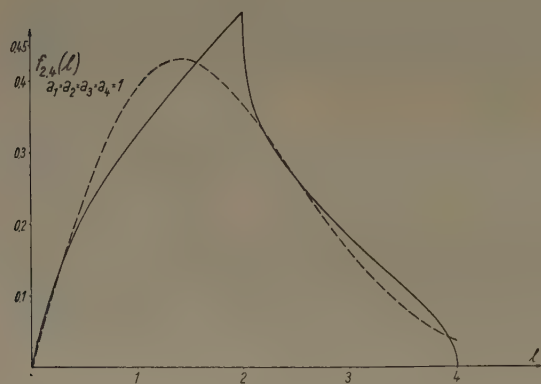


Bild 3

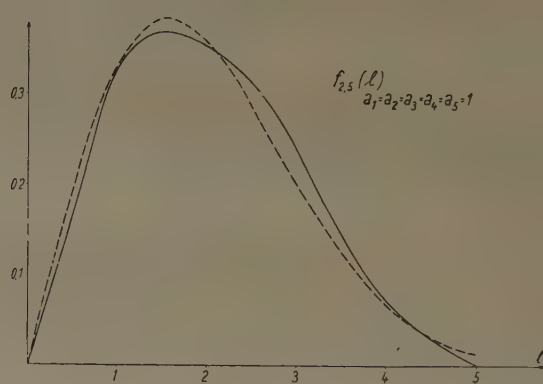


Bild 4

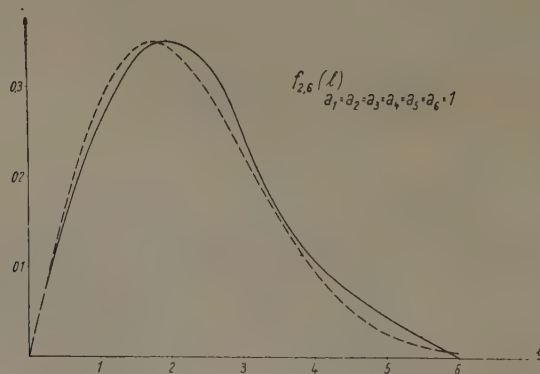


Bild 5

Aus (2.6) folgt durch Integration, daß die Wahrscheinlichkeit, daß eine Länge zwischen 0 und  $l$  auftritt, der Ausdruck

$$F_{2,n}(l) = l \int_0^\infty \prod_{k=1}^n J_0(a_k t) \cdot J_1(l t) dt \dots \dots \dots (2.10)$$

<sup>1)</sup> s. z. B. Magnus - Oberhettinger, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1949.



gilt speziell:

$$\int_0^\pi C_m^{\frac{p}{2}-1} (\cos \vartheta) \sin^{p-2} \vartheta d\vartheta = \begin{cases} 0 & m \neq 0 \\ \frac{\pi \Gamma(p-2)}{2^{p-3} \left(\frac{p}{2}-1\right) \left[\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)\right]^2} & m = 0 \end{cases} \quad (3.9),$$

so daß man für die rechte Seite der Gl. (3.5) mit dem Ansatz (3.6) erhält:

$$\frac{\left[\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)^2 2^{p-2} \left[2^{\frac{p}{2}-1} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\right]^{n-1} \left(\frac{p}{2}-1\right) \cdot 2^{\frac{p}{2}-1} \cdot \Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right) \pi \cdot \Gamma(p-2)\right]}{\pi \cdot \Gamma(p-1) l^{\frac{p}{2}-1} \cdot 2^{p-3} \left(\frac{p}{2}-1\right) \left[\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)\right]^n} \\ \times \int_0^\infty \prod_{k=1}^{n+1} \left[ \frac{J_{\frac{p}{2}-1}(a_k t)}{(a_k t)^{\frac{p}{2}-1}} \right] \cdot J_{\frac{p}{2}-1}(l t) t^{p/2} dt = \frac{\left[2^{\frac{p}{2}-1} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\right]^n}{l^{\frac{p}{2}-1}} \cdot \int_0^\infty \prod_{k=1}^{n+1} \left[ \frac{J_{\frac{p}{2}-1}(a_k t)}{(a_k t)^{\frac{p}{2}-1}} \right] \cdot J_{\frac{p}{2}-1}(l t) t^{p/2} dt \quad (3.10)$$

also, wie behauptet wurde,  $\frac{f_{p,n+1}(l)}{l^{p-1}}$ , da Gl. (3.6) für  $n=2$  Gl. (3.4) liefert.

Unter Einführung der ganzen Funktion:

$${}_0F_1\left(\nu+1; -\frac{1}{4}z^2\right) = \left(\frac{2}{z}\right)^\nu \cdot \Gamma(\nu+1) \cdot J_\nu(z) \cdot \dots \quad (3.11)$$

schreibt sich noch Gl. (3.6) bequemer:

$$f_{p,n}(l) = \frac{l^{p/2}}{2^{\frac{p}{2}-1} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty \prod_{k=1}^n {}_0F_1\left(\frac{p}{2}; -\frac{1}{4}a_k^2 t^2\right) \cdot J_{\frac{p}{2}-1}(l t) t^{p/2} dt \quad (3.12)$$

Die der Gl. (2.10) entsprechende Formel lautet:

$$F_{p,n}(l) = \frac{l^{p/2}}{2^{\frac{p}{2}-1} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty \prod_{k=1}^n {}_0F_1\left(\frac{p}{2}; -\frac{1}{4}a_k^2 t^2\right) J_{p/2}(l t) t^{\frac{p}{2}-1} dt \quad (3.13).$$

Mit den Gl. (3.12) und (3.13) haben wir die einheitliche, für alle positiven ganzzahligen  $p$  und  $n$  gültige, Darstellung für die Verteilung des Betrages einer Vektorsumme erhalten.

Mit diesen Formeln beherrscht man auch weitgehend die Verteilungen von Summen, wenn die einzelnen „Summanden“ selbst irgendwelchen Verteilungen mit den Frequenzfunktionen  $h_{p,k}(a_k)$  gehorchen. Wir werden später dafür Beispiele geben, wollen zunächst aber einige allgemeine Sätze, einige Sonderfälle, sowie das asymptotische Verhalten der Primitiv-Verteilungen (feste  $a_k$ ) für große  $n$  untersuchen.

#### IV. Einige allgemeine Sätze, Sonderfälle und asymptotisches Verhalten für große $n$

Da  $f_{p,n}(l)$  für  $l > \sum_{k=1}^n a_k$  offenbar identisch null ist, bestätigt sich z. B. auf diesem Wege eine in Formelsammlungen zu findende Beziehung zwischen Bessel-funktionen, wie sie etwa bei Magnus - Oberhettiger in der Form:

$$\int_0^\infty \prod_{k=1}^n J_\nu(a_k t) \cdot \frac{dt}{t^{\nu n - 2\nu - 1}} = 0 \quad a_1 > a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad (4.1)$$

angegeben ist. Weiter erscheint nach Gl. (3.12)  $f_{p,n}(l)$  als H a n k e l - Transformierte, und die Umkehrung der H a n k e l - Transformation liefert die Beziehung:

$$\prod_{k=1}^n {}_0F_1\left(\frac{p}{2}; -\frac{1}{4}a_k^2 t^2\right) = \int_0^\infty f_{p,n}(l) \cdot {}_0F_1\left(\frac{p}{2}; -\frac{1}{4}l^2 t^2\right) dl \quad (4.2).$$

Die Gl. (3.12) und (4.2) sind als die Erweiterung der in der mathematischen Statistik für  $p = 1$  benutzten F o u r i e r - Transformation anzusprechen, wobei die F o u r i e r - Transformierte der Frequenzfunktion gewöhnlich als charakteristische Funktion bezeichnet wird. Im Sonderfall  $p = 1$  lauten nämlich die entsprechenden Formeln:

$$f_{1,n}(l) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \prod_{k=1}^n \cos a_k t \cdot \cos l t dt \quad \dots \quad (4.3),$$

$$F_{1,n}(l) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \prod_{k=1}^n \cos a_k t \cdot \frac{\sin l t}{t} \cdot dt \quad \dots \quad (4.4).$$

Den Streckenspektren im Falle  $p > 1, n > 1$  steht also im Falle  $p = 1$  ein diskretes Spektrum gegenüber. Es ist angebracht, hier die Beschränkung auf positive  $l$  und  $a_k$  aufzugeben. Es ist dann zu schreiben:

$$f_{1,n}^*(l) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \prod_{k=1}^n \cos a_k t \cdot \cos l t dt \quad \dots \quad (4.3a),$$

$$F_{1,n}^*(l) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \prod_{k=1}^n \cos a_k t \cdot \frac{\sin l t}{t} \cdot dt \quad \dots \quad (4.4a).$$

Die charakteristische Funktion für die Summe von  $n$  positiven oder negativen Zahlen  $a_k$  ist also das Produkt:

$$\varphi_{1,n}(t) = \prod_{k=1}^n \cos a_k t \quad \dots \quad (4.5).$$

Im allgemeinen Fall sind die charakteristischen Funktionen die Produkte:

$$\varphi_{p,n}(t) = \prod_{k=1}^n {}_0F_1\left(\frac{p}{2}; -\frac{1}{4} a_k^2 t^2\right) \quad \dots \quad (4.6),$$

und an die Stelle der F o u r i e r - Transformation tritt die H a n k e l - Transformation.

Alle Momente gerader Ordnung sind aus Gl. (4.2) durch Vergleich gleicher Potenzen von  $t$  abzulesen. Insbesondere gilt für das zweite Moment die Beziehung:

$$\int_0^{\infty} l^2 f_{p,n}(l) dl = \sum_{k=1}^n a_k^2 \quad \dots \quad (4.7).$$

Die Momente ungerader Ordnung dagegen, insbesondere also auch das arithmetische Mittel:

$$m_{p,n} = \int_0^{\infty} l \cdot f_{p,n}(l) dl \quad \dots \quad (4.8),$$

sind nicht so ohne Weiteres anzugeben, bis auf die durch die Gl. (4.3a) und (4.4a) definierte Verteilung für  $p = 1$ ; bei der alle ungeraden Momente verschwinden.

Die allgemeine Formel für die Frequenzfunktionen weist ferner auf einen prinzipiellen Unterschied zwischen geraden und ungeraden Dimensionen hin. Für ungerades  $p$  hat man es mit B e s s e l -schen Funktionen halbzahlgiger Ordnung, also elementartranszendenten Funktionen zu tun, während für gerades  $p$  B e s s e l -sche Funktionen ganzzahliger Ordnung eingehen. So erhält man z. B. für  $p = 3$ :

$$f_{3,n}(l) = \frac{2l}{\pi} \int_0^{\infty} \prod_{k=1}^n \frac{\sin a_k t}{a_k t} \cdot \sin l t \cdot t dt \quad \dots \quad (4.9).$$

Im Gegensatz zu  $p = 2$  sind alle Frequenzfunktionen rationale Funktionen, nämlich Polynome in  $l$ , von denen wir zum Vergleich mit  $p = 2$  einige für Vektoren gleicher Länge 1 angeben. So gilt:

$$\left. \begin{aligned}
 f_{3,2}(l) &= \begin{cases} \frac{1}{2} l & 0 \leq l \leq 2 \\ 0 & l > 2 \end{cases} \\
 f_{3,3}(l) &= \begin{cases} \frac{1}{2} l^2 & 0 \leq l \leq 1 \\ \frac{1}{4} l(3-l) & 1 \leq l \leq 3 \end{cases} \\
 f_{3,4}(l) &= \begin{cases} \frac{1}{16} l^2(8-3l) & 0 \leq l \leq 2 \\ \frac{1}{16} \cdot l(4-l)^2 & 2 \leq l \leq 4 \end{cases} \\
 f_{3,5}(l) &= \begin{cases} \frac{1}{16} l^2(5-l^2) & 0 \leq l \leq 1 \\ \frac{l}{48} (2l^3 - 15l^2 + 30l - 5) & 1 \leq l \leq 3 \\ \frac{l}{96} (5-l)^3 & 3 \leq l \leq 5 \end{cases} \\
 f_{3,6}(l) &= \begin{cases} \frac{l^2}{4 \cdot 96} (96 - 24l^2 + 5l^3) & 0 \leq l \leq 2 \\ \frac{l}{8 \cdot 96} (672l - 360l^2 + 72l^3 - 5l^4 - 240) & 2 \leq l \leq 4 \\ \frac{l}{8 \cdot 96} (6-l)^4 & 4 \leq l \leq 6 \end{cases}
 \end{aligned} \right\} \dots (4.10).$$

Das asymptotische Verhalten der Verteilungen für großes  $n$  kann aus der Darstellung (3.12) unter gewissen Voraussetzungen leicht erschlossen werden. Zunächst stellen wir fest, daß der Betrag des Faktors in der charakteristischen Funktion (4.6) für  $t > 0$  kleiner als 1 ist. Die charakteristische Funktion strebt also für großes  $n$  für alle  $t > 0$  gegen Null, sofern die  $a_k$  nicht selbst gegen Null streben.

Wir schreiben (3.12) nun in der Form:

$$f_{p,n}(l) = \frac{l^{p/2}}{2^{\frac{p}{2}-1} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty e^{\sum_{k=1}^n \left\{ \ln_1 F_0\left(\frac{p}{2}; -\frac{1}{4} a_k^2 t^2\right) \right\}} \cdot J_{\frac{p}{2}-1}(lt) t^{p/2} dt \dots (4.11).$$

Es seien  $\xi_{\frac{p}{2}-1,m}$ ;  $m = 1, 2, \dots$  die Nullstellen von  ${}_0F_1\left(\frac{p}{2}; -\frac{1}{4} z^2\right)$ .

Dann gilt für alle  $z$  die Produktdarstellung:

$${}_0F_1\left(\frac{p}{2}; -\frac{1}{4} z^2\right) = \prod_{m=1}^\infty \left(1 - \frac{z^2}{\xi_{\frac{p}{2}-1,m}^2}\right) \dots (4.12)$$

und man hat:

$$f_{p,n}(l) = \frac{l^{p/2}}{2^{\frac{p}{2}-1} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty e^{\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^\infty \ln\left(1 - \frac{a_k^2 t^2}{\xi_{\frac{p}{2}-1,m}^2}\right)} \cdot J_{\frac{p}{2}-1}(lt) t^{p/2} dt \dots (4.13).$$

Entwickelt man jeden Summanden in eine Potenzreihe, so ist der Koeffizient von  $t^{2r}$  gegeben durch:

$$c_r = -\frac{1}{r} \cdot \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^\infty \frac{a_k^{2r}}{\xi_{\frac{p}{2}-1,m}^{2r}} \dots (4.14).$$

Setzt man noch zur Abkürzung:

$$S_{2r} = \sum_{k=1}^n a_k^{2r} \dots (4.15),$$

so hat man für die charakteristische Funktion  $\varphi_{p,n}(t)$  die Darstellung:

$$\varphi_{p,n}(t) = \prod_{k=1}^n F_1\left(\frac{p}{2}; -\frac{1}{4} a_k^2 t^2\right) = e^{-\left[\frac{S_2 t^2}{2p} + \frac{S_4 t^4}{4p^2(p+2)} + \dots\right]} \quad (4.16).$$

Wir machen nun die Substitution:

$$t = \sqrt{\frac{p}{S_2}} \cdot \tau \quad (4.17)$$

und erhalten:

$$f_{p,n}(l) = \frac{l^{p/2}}{2^{\frac{p}{2}-1} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \left(\sqrt{\frac{p}{S_2}}\right)^{\frac{p}{2}+1} \int_0^\infty \varphi_{p,n}(\tau) \cdot J_{\frac{p}{2}-1}\left(\sqrt{\frac{p}{S_2}} \cdot l \cdot \tau\right) \tau^{p/2} d\tau \quad (4.18).$$

Unter der Voraussetzung, daß die Bedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_4}{S_2^2} = 0 \quad (4.19)$$

erfüllt ist, wie es z. B. für den Fall gleicher Strecken der Fall ist, gilt dann:

$$\begin{aligned} f_{p,n}(l) &\approx \frac{l^{p/2}}{2^{\frac{p}{2}-1} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \left(\sqrt{\frac{p}{S_2}}\right)^{\frac{p}{2}+1} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} \tau^2} \cdot J_{\frac{p}{2}-1}\left(\sqrt{\frac{p}{S_2}} l \tau\right) \tau^{p/2} d\tau \\ &= \frac{1}{2^{\frac{p}{2}-1} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \cdot \left(\frac{p}{S_2}\right)^{p/2} \cdot l^{p-1} e^{-\frac{1}{2} \frac{p}{S_2} l^2} \quad (4.20). \end{aligned}$$

Diese asymptotische Verteilung ist aber identisch mit der in der theoretischen Statistik als  $\chi^2$ -Verteilung bezeichneten, und entspricht z. B. für  $p=3$  der Boltzmannschen Geschwindigkeitsverteilung in einem idealen Gas. Für  $p=1$  erhält man speziell die halbe Gauß-Kurve, oder wenn man von Gl. (4.3a) ausgeht, die vollständige Normalverteilung. Ist die Bedingung (4.19) nicht erfüllt, so werden die Verteilungen im Allgemeinen auch nicht das betreffende asymptotische Verhalten zeigen, wofür wir ein Beispiel geben wollen. Wir gehen aus von Gl. (4.3a), betrachten also die Frequenzfunktion

$$f_{1,n}(l) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \prod_{k=1}^n \cos a_k t \cdot \cos l t dt \quad (4.21)$$

und wählen für die Zahlen  $a_k$  die geometrische Folge:

$$a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = \frac{1}{4}; a_3 = \frac{1}{8}; \dots a_k = \frac{1}{2^k} \quad (4.22)$$

Die charakteristische Funktion, das Produkt  $\prod_{k=1}^n \cos a_k t$  strebt jetzt für  $n \rightarrow \infty$  einem endlichen Grenzwert zu. Es gilt nämlich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin t}{t} \quad (4.23)$$

und die Frequenzfunktion wird ein Dirichletscher Faktor, nämlich:

$$f_{1,\infty}(l) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \cdot \cos l t dt = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 < l < 1 \\ 0 & |l| > 1 \end{cases} \quad (4.24).$$

Aus diesem Beispiel folgt der Satz, daß die Summe der Zahlenfolge  $\pm \frac{1}{2^k}$ , wenn das Vorzeichen jedes Summanden gleiche Wahrscheinlichkeit hat, jeden Wert zwischen  $-1$  und  $+1$  gleich häufig annimmt.

**V. Verallgemeinerung der Verteilungsfunktionen auf den Fall vorgegebener Verteilungen der  $a_k$** 

Wie bereits erwähnt, lassen sich die abgeleiteten Verteilungen ohne Weiteres auf den Fall erweitern, daß die  $a_k$  selbst irgendwelchen vorgegebenen Verteilungen genügen. Es seien:

$$h_{p,k}(a_k) \dots \dots \dots (5.1)$$

die Frequenzfunktionen der Variablen  $a_k$ , dann bestimmt sich die Frequenzfunktion der Summenverteilung nach der Formel:

$$f_{p,n}(l) = \frac{l^{p/2}}{2^{\frac{p}{2}-1} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \int_0^\infty \prod_{k=1}^n \left[ \int_0^\infty {}_0F_1\left(\frac{p}{2}; -\frac{1}{4} a_k^2 t^2\right) h_{p,k}(a_k) da_k \right] \cdot J_{\frac{p}{2}-1}(lt) t^{p/2} dt \quad (5.2).$$

Wir wollen nun an einigen prägnanten Beispielen aus der Literatur, die Nützlichkeit der Formel (5.2) zeigen.

Aus Gl. (5.2) folgt als erstes Beispiel der Satz, daß die „Summen“-Verteilung eine  $\chi^2$ -Verteilung ist, wenn die  $a_k$  selbst einer solchen Verteilung genügen. Es seien also die Werte  $a_k$  entsprechend den Frequenzfunktionen:

$$h_{p,k}(a_k) = \frac{a_k^{p-1}}{2^{\frac{p}{2}-1} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \cdot \left(\frac{p}{b_k}\right)^{p/2} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{p}{b_k} \cdot a_k^2} \dots \dots \dots (5.3).$$

verteilt. Jedes einzelne Integral

$$I_{p,k}(b_k t) = \int_0^\infty h_{p,k}(a_k) {}_0F_1\left(\frac{p}{2}; -\frac{1}{4} a_k^2 t^2\right) da_k \dots \dots \dots (5.4)$$

ist ein Exponentialfaktor:

$$I_{p,k}(b_k t) = e^{-\frac{1}{2} \frac{b_k}{p} t^2} \dots \dots \dots (5.5),$$

so daß die Frequenzfunktion für die Verteilung der „Summe“ sich aus der Gl.

$$f_{p,n}(l) = \frac{l^{p/2}}{2^{\frac{p}{2}-1} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} \frac{b}{p} t^2} \cdot J_{\frac{p}{2}-1}(lt) t^{p/2} dt \quad b = \sum_{k=1}^n b_k \dots \dots (5.6)$$

berechnet, was für die Verteilung von  $l$  wieder auf eine Frequenzfunktion nach Gl. (5.3), nämlich auf:

$$f_{p,n}(l) = \frac{l^{p-1}}{2^{\frac{p}{2}-1} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \cdot \left(\frac{p}{b}\right)^{p/2} e^{-\frac{1}{2} \frac{p}{b} l^2} \dots \dots \dots (5.7)$$

führt. In diesem Ergebnis ist als Spezialfall für  $p = 1$  ein Satz der mathematischen Statistik enthalten, der besagt, daß eine Summe wieder normal um Null verteilt ist, wenn die einzelnen Summanden normal um Null verteilt sind.

Als weiteres Beispiel dafür, daß die „Summe“ einer gleichen Verteilung wie die der Summanden genügt, wird in Lehrbüchern der theoretischen Statistik <sup>2)</sup> für  $p = 1$  vielfach die sogenannte C a u c h y sche Verteilung mit der Frequenzfunktion:

$$h(x) = \frac{a}{\pi} \cdot \frac{1}{a^2 + x^2} \quad -\infty < x < +\infty \dots \dots \dots (5.8)$$

angeführt.

Eine damit eng verwandte ist die von R. A. F i s h e r eingeführte Verteilung mit der Frequenzfunktion

$$f_{p,q}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} \cdot \frac{x^{\frac{p}{2}-1}}{(x+1)^{\frac{p+q}{2}}} \quad (x > 0) \dots \dots \dots (5.9).$$

Wir wollen nun zeigen, daß die Verteilung von F i s h e r für  $q = 1$  und für die Variable  $x^2$  statt  $x$ , das Analogon zu (5.8) bei  $p$  Freiheitsgraden ist, und wie die C a u c h y sche Verteilung die Eigenschaft besitzt, sich für die Summenverteilung zu reproduzieren.

<sup>2)</sup> z. B. H. C r a m é r, Mathematical Methods of Statistics, Princeton 1946 und M. G. K e n d a l l, The Advanced Theory of Statistics, Vol. I, London 1948.

Wir nehmen also an, daß die  $a_k$  einer Verteilung mit den Frequenzfunktionen

$$h_{p,k}(a) = \frac{2b_k}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \cdot \frac{a_k^{p-1}}{(b_k^2 + a_k^2)^{\frac{p+1}{2}}} \quad 0 \leq a_k < \infty \quad \dots \quad (5.10)$$

genügen, in denen (5.8) für die halbseitige Verteilung  $x > 0$  für  $p = 1$  enthalten ist.

Jedes Integral liefert wieder, wie im ersten Beispiel, eine Exponentialfunktion, nämlich:

$$I_{p,k}(b_k t) = e^{-b_k t} \quad \dots \quad (5.11),$$

so daß die neue charakteristische Funktion als  $n$ -faches Produkt sofort angebar ist, wie auch die Frequenzfunktion als H a n k e l-Transformierte der Exponentialfunktion  $e^{-bt}$ :

$$f_{p,n}(l) = \frac{l^{p/2}}{2^{\frac{p}{2}-1} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-bt} J_{\frac{p}{2}-1}(lt) t^{p/2} dt \quad b = \sum_{k=1}^n b_k \quad \dots \quad (5.12)$$

bekannt ist und die Funktion:

$$f_{p,n}(l) = \frac{2b}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \cdot \frac{l^{p-1}}{(b^2 + l^2)^{\frac{p+1}{2}}} \quad \dots \quad (5.13)$$

liefert. Die Verteilung für  $l$  hat also die gleiche Frequenzfunktion, wie die einzelnen  $a_k$ .

Bei der allgemeinen Verteilung von R. A. F i s h e r ist zwar die Frequenzfunktion für  $l$  nicht mehr explizit angebar, aber für die charakteristischen Funktionen besteht ein interessanter Zusammenhang.

Es sei

$$h_{p,k}(a_k) = \frac{2b_k^q \Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} \cdot \frac{a_k^{p-1}}{(b_k^2 + a_k^2)^{\frac{p+q}{2}}} \quad \dots \quad (5.14).$$

Man findet dann:

$$I_{p,k}(b_k t) = \frac{2b_k^q \Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} \cdot \frac{2^{\frac{p}{2}-1} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{t^{\frac{p}{2}-1}} \cdot \int_0^\infty \frac{J_{\frac{p}{2}-1}(a_k t) a_k^{p/2} da_k}{(b_k^2 + a_k^2)^{\frac{p+q}{2}}} \quad \dots \quad (5.15)$$

$$I_{q,k}(b_k t) = \frac{(b_k t)^{q/2}}{2^{\frac{q}{2}-1} \Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} \cdot K_{q/2}(b_k t)$$

wobei  $K_\nu(z)$  die modifizierte H a n k e l-Funktion bedeutet. Die neue charakteristische Funktion ist also:

$$\bar{\varphi}_{q,n}(t) = \frac{1}{2^{n(\frac{q}{2}-1)} \left[ \Gamma\left(\frac{q}{2}\right) \right]^n} \cdot \prod_{k=1}^n (b_k t)^{q/2} K_{q/2}(b_k t) \quad \dots \quad (5.16),$$

der die Frequenzfunktion:

$$f_{p,n}^{(q)}(l) = \frac{l^{p/2}}{2^{\frac{p}{2}-1} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \cdot 2^{n(\frac{q}{2}-1)} \left[ \Gamma\left(\frac{q}{2}\right) \right]^n} \cdot \int_0^\infty \prod_{k=1}^n (b_k t)^{q/2} \cdot K_{q/2}(b_k t) \cdot J_{\frac{p}{2}-1}(lt) t^{p/2} dt \quad (5.17)$$

zugeordnet ist.

Zum Abschluß betrachten wir noch zwei Verteilungen der mathematischen Statistik, die in einem interessanten Zusammenhang zu unseren „Summen“-Verteilungen stehen.

Als erstes nehmen wir die sogenannte hypergeometrische Verteilung

$$dF = \frac{1}{B(m, n)} \cdot (1-x)^{m-1} x^{n-1} dx, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \dots \quad (5.18),$$

die wir etwas allgemeiner und mit der Variablen  $x = a_k^2$  in der Form schreiben:

$$h_{p,k}(a_k) = \frac{2 \Gamma\left(\frac{p}{2} + q\right)}{\Gamma(q) \cdot \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) b_k^{2q+p-2}} \cdot (b_k^2 - a_k^2)^{q-1} \cdot a_k^{p-1} \cdot \dots \quad (5.19).$$

Es folgt dann:

$$\left. \begin{aligned} I_{p,k}(b_k t) &= \int_0^{b_k} h_{p,k}(a_k) \cdot {}_0F_1\left(\frac{p}{2}; -\frac{1}{4} a_k^2 t^2\right) da_k \\ &= \frac{2^{p/2} \cdot \Gamma\left(\frac{p}{2} + q\right)}{\Gamma(q) \cdot b_k^{2q+p-2} \cdot t^{\frac{p}{2}-1}} \cdot \int_0^{b_k} J_{\frac{p}{2}-1}(a_k t) (b_k^2 - a_k^2)^{q-1} \cdot a_k^{p/2} da_k \\ &= \frac{2^{p/2} \cdot \Gamma\left(\frac{p}{2} + q\right)}{\Gamma(q) \cdot (b_k t)^{\frac{p}{2}-1}} \cdot \int_0^{\pi/2} J_{\frac{p}{2}-1}(b_k t \cdot \sin \vartheta) \cdot \sin^{p/2} \vartheta \cos^{2q-1} \vartheta d\vartheta \\ &= \frac{2^{\frac{p}{2}-1+q} \Gamma\left(\frac{p}{2} + q\right)}{(b_k t)^{\frac{p}{2}-1+q}} \cdot J_{\frac{p}{2}-1+q}(b_k t) = {}_0F_1\left(\frac{p}{2} + q; -\frac{1}{4} b_k^2 t^2\right); \quad \begin{matrix} p > 0 \\ q > 0 \end{matrix} \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

und die neue Frequenzfunktion lautet:

$$f_{p,n}(l) = \frac{l^{p/2}}{2^{\frac{p}{2}-1} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \cdot \int_0^n \prod_{k=1}^n {}_0F_1\left(\frac{p}{2} + q; -\frac{1}{4} b_k^2 t^2\right) \cdot J_{\frac{p}{2}-1}(l t) t^{p/2} dt \cdot \dots \quad (5.21).$$

Die charakteristische Funktion einer Vektorsumme bei  $p$ -Freiheitsgraden und Primitivverteilung (konstante  $a_k$ ) geht also bei einer hypergeometrischen Verteilung der  $a_k$  nach Gl. (5.19) in die entsprechende charakteristische Funktion von  $p + 2q$  Freiheitsgraden über.

Als letztes Beispiel nehmen wir die Verteilung

$$h_{p,k}(a_k) = \frac{a_k^{p-1} e^{-a_k}}{\Gamma(p)} \quad 0 \leq a_k < \infty \quad \dots \quad (5.22).$$

In diesem Fall findet man:

$$I_{p,k}(t) = \frac{2^{\frac{p}{2}-1} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{t^{\frac{p}{2}-1} \Gamma(p)} \cdot \int_0^\infty e^{-a_k} \cdot J_{\frac{p}{2}-1}(t a_k) a_k^{p/2} da_k = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{p+1}{2}}} \cdot \dots \quad (5.23)$$

und

$$\begin{aligned} f_{p,n}(l) &= \frac{l^{p/2}}{2^{\frac{p}{2}-1} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty \frac{J_{\frac{p}{2}-1}(l t) t^{p/2} dt}{(1+t^2)^{n \frac{p+1}{2}}} \\ &= \frac{l^{p-1} \cdot l^{(n-1)\frac{p}{2} + \frac{n}{2}}}{2^{p-2} \cdot \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \cdot \Gamma\left(n \cdot \frac{p+1}{2}\right) 2^{(n-1)\frac{p}{2} + \frac{n}{2}}} \cdot K_{\left[(n-1)\frac{p}{2} + \frac{n}{2}\right]}(l) \cdot \dots \quad (5.24), \end{aligned}$$

wobei wieder  $K_\nu(z)$  die modifizierte H a n k e l-Funktion bedeutet.

Eingegangen am 4. Mai 1953.

## Zusammenfassender Bericht Zolotareffsche rationale Funktionen

Von *H. Piloty* in *München*

Für mancherlei technische Probleme, vornehmlich solche aus der Synthese elektrischer Wechselstrom-Schaltungen — Auffinden solcher Schaltungen mit vorgeschriebenen Eigenschaften — spielen gewisse, von dem Mathematiker E. Zolotareff 1877 erstmalig untersuchte (gebrochene) rationale Funktionen eine wesentliche Rolle <sup>1)</sup>. Sie lassen sich in gewissem Sinne als eine Verallgemeinerung der Tschebyscheffschen Polynome auffassen, da sich die letzteren durch einen Grenzübergang aus jenen gewinnen lassen. Ähnlich wie die Tschebyscheffschen Polynome lösen sie die Aufgabe, den Wert 0 in einem reellen Intervall der unabhängigen Variablen gleichmäßig zu approximieren. Sie unterscheiden sich jedoch von ihnen dadurch, daß sie im komplementären Intervall den Wert  $\infty$  gleichmäßig approximieren, was die Tschebyscheffschen Polynome nicht tun. Das Null-Approximations-Intervall ist der reelle offene Bereich  $|z| < 1$ , das komplementäre der reelle offene Bereich  $|z| > 1$ . Je näher die Intervallgrenzen an  $\pm 1$  heranrücken, desto schlechter wird bei gegebenem Grad die Approximation.

Funktionen dieser Art — ich nenne sie zu Ehren ihres ersten Bearbeiters Zolotareffsche Funktionen (kurz: Z-Funktionen) — werden in diesem Bericht beschrieben. Sie sollen hierdurch demjenigen, der sie benutzen will, in allen wesentlichen Eigenschaften bekannt gemacht werden.

In erster Linie interessiert der Zusammenhang zwischen Güte der Approximation (maximale Abweichung  $\Delta$  vom Wert 0 im Intervall  $-\sqrt{k} \leq z \leq +\sqrt{k}$ ) und Intervallgrenze  $\sqrt{k}$  bei gegebenem Grad. Er ist durch Gl. (9) gegeben und in Bild 2 für die ersten 12 Grade dargestellt. Weiterhin braucht man die Konstanten (Nullstellen und Pole), welche die Funktionen bestimmen. Sie sind durch Gl. (2) und (3) gegeben. Alle sonstigen Eigenschaften der Z-Funktionen folgen am einfachsten aus ihrer Parameter-Darstellung (Gl. (5) bis (8)). Dies ist der Inhalt von Teil I. Der Teil II beschreibt das Verhalten der Z-Funktionen im einzelnen und zwar genauer für reelle Werte der unabhängigen Variablen  $z$ , in großen Zügen auch im Komplexen. Der Teil III schließlich befaßt sich mit einer Aufgabe, die bei den technischen Anwendungen der Z-Funktionen immer wieder vorkommt, nämlich: explizite Lösungen der algebraischen Gleichung  $F(z) = \text{const}$  anzugeben, was für beliebigen Grad  $n$  infolge der speziellen Eigenschaften der Z-Funktionen möglich ist. Von praktischer Bedeutung sind insbesondere die Teilaufgaben, bei denen const entweder eine reelle, oder eine rein imaginäre, oder schließlich eine komplexe Konstante vom Betrag 1 ist.

Die mathematischen Hilfsmittel entstammen durchweg der Theorie der (Jacobi-schen) elliptischen Funktionen. Obwohl sie in der Literatur leicht zugänglich sind — vgl. z. B. Jahnke - Emde, Tafeln höherer Funktionen, 4te Auflage, Teubner 1948 — habe ich doch die benutzten Formeln in Anhang I der Bequemlichkeit halber noch einmal unbewiesen kurz zusammengestellt. Eine Ausnahme machen diejenigen Regeln, die aus der Theorie der Modul-Transformationen elliptischer Funktionen stammen. Ihr Beweis ist in den Anhängen II und III angedeutet. Die Anwendung der Modul-Transformationen auf die Z-Funktionen im Sinn von Anhang II (Parameter-Darstellung der Z-Funktionen) stammt von amerikanischen Elektro-Ingenieuren (E. L. Norton u. S. Darlington). Diejenige der speziellen Landenschen Modul-Transformation auf die Berechnung des Verhaltens der Z-Funktionen auf dem Einheitskreis (Anhang III) habe ich nirgends finden können.

Im übrigen verfolgt die Darstellung die Tendenz, möglichst nur zu beschreiben, die Beweise nur anzudeuten und sie dort, wo auch die Andeutung zu viel ablenken würde, in Anhänge zu setzen.

### I. Definitionen und Parameter-Darstellung

Die zu beschreibenden Funktionen  $F(z)$  gehören zu einer Klasse gebrochen rationaler Funktionen mit folgenden Eigenschaften: (Der Grad sei  $n$ )

- (a)  $F(z)$  = reell für reelle  $z$
- (b)  $F(1/z) = 1/F(z)$
- (c) Die  $n$  Nullstellen  $a_i$  liegen auf der reellen Achse im Intervall  $-1 < a_i < +1$ .

<sup>1)</sup> vgl. die historische Note von W. Cauer in Z. angew. Math. Mech. 20, (1940) S. 358.

Wegen (b) ist  $F^2(1) = 1$ . Der Einfachheit halber soll noch normierend

$$(d) \quad F(1) = +1$$

festgesetzt werden.

Die allgemeinste, diesen Eigenschaften genügende Funktion hat offenbar die Darstellung:

$$F(z) = \prod_{i=1}^m \frac{z - a_i}{1 - \bar{a}_i z} \quad \text{mit} \quad -1 < a_i < +1 \quad \dots \quad (1).$$

Die Z-Funktionen haben darüber hinaus noch die Symmetrieeigenschaft,

entweder: (e) ungerade [ $F(-z) = -F(z)$ ] oder gerade [ $F(-z) = F(z)$ ]

zu sein.

Aus der allgemeinen Darstellung (1) wird dann für

$$\left. \begin{array}{l} \text{ungerade Funktionen} \\ F(z) = z \prod_{\nu=1}^m \frac{z^2 - a_{2\nu}^2}{1 - a_{2\nu}^2 z^2} \\ \text{Grad } n = 2m + 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{gerade Funktionen} \\ F(z) = \prod_{\nu=1}^m \frac{z^2 - a_{2\nu-1}^2}{1 - a_{2\nu-1}^2 z^2} \\ \text{Grad } n = 2m \end{array} \right\} \quad \dots \quad (2)$$

mit  $0 < \left\{ \begin{array}{l} a_{2\nu} \\ a_{2\nu-1} \end{array} \right\} < 1$

Zolotareff hat nun die Aufgabe gelöst, mit Funktionen dieser Gestalt den Wert 0 in einem reellen Intervall mit den Grenzen <sup>2)</sup>  $-\sqrt{k}$  und  $\sqrt{k}$ ,  $0 < k < 1$  gleichmäßig im Tschebyscheffschen Sinne zu approximieren, ebenso wie dies etwa die wohlbekannten Tschebyscheffschen Polynome im Intervall mit den Grenzen  $-1$  und  $+1$  tun. Im Gegensatz aber zu diesen Polynomen approximieren die Z-Funktionen im reellen Intervall  $|z| > \frac{1}{\sqrt{k}}$  wegen der Eigenschaft (b) den Wert  $\infty$  gleichmäßig. Daraus und aus Eigenschaft (d)

erhält auch, warum sie den Wert 0 nicht im ganzen, abgeschlossenen Intervall  $-1$  bis  $+1$  approximieren können.

Die Lösung der Aufgabe besteht darin, den Parametern  $a_{2\nu}$  bzw.  $a_{2\nu-1}$  der Darstellung (2) die Werte

$$\left. \begin{array}{l} a_{2\nu} = \sqrt{k} \operatorname{sn} \left[ \frac{2\nu}{2m+1} K; k \right] \\ \nu = 1 \dots m \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} a_{2\nu-1} = \sqrt{k} \operatorname{sn} \left[ \frac{2\nu-1}{2m} K; k \right] \\ \nu = 1 \dots m \end{array} \right\} \quad \dots \quad (3)$$

zu geben. Das Zeichen  $\operatorname{sn}$  steht für die Jacobi'sche elliptische Funktion sinus amplitudinis,  $k$  ist ihr Modul,  $K$  die reelle Viertelperiode, welche mit dem Modul durch das vollständige elliptische Integral erster Art

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau}} \quad \dots \quad (4)$$

verknüpft ist.

Rationale Funktionen mit einer Darstellung nach Gl. (2) und Parametern gemäß den Gl. (3) und (4) sind Gegenstand unserer weiteren Diskussion. Obwohl natürlich das Verhalten der Z-Funktionen durch die explizite Darstellung mittels Gl. (2) und (3) völlig bestimmt ist, kann man es aus einer Parameter-Darstellung viel leichter erkennen.

Wir setzen unter Einführung einer Hilfsvariablen  $v$

$$z(v) = \sqrt{k} \operatorname{sn} [vK; k] \quad \dots \quad (5)$$

und erhalten dann für  $w = F(z)$  im ungeraden bzw. im geraden Fall:

$$w(v) = (-1)^m \sqrt{k_1} \operatorname{sn} [nvK_1; k_1] \quad | \quad w(v) = (-1)^m \sqrt{k_1} \operatorname{sn} [(nv+1)K_1; k_1] \quad \dots \quad (6).$$

Hierin ist der neue Modul  $k_1$  gegeben durch

$$k_1 = k^n \prod_{\nu=1}^m \operatorname{sn}^4 \left[ \frac{2\nu-1}{n} K; k \right] \quad \dots \quad (7)$$

<sup>2)</sup> Die Wahl der Bezeichnung  $\pm \sqrt{k}$  für die Intervallgrenzen wird sich gleich rechtfertigen.

und die neue reelle Viertelperiode  $K_1$  entweder durch Gl. (4) nach Ersatz von  $k$  durch  $k_1$  oder auch durch

$$K_1 = \frac{1}{n} K \frac{\prod_{\nu=1}^m s n^2 \left[ \frac{2\nu}{n} K; k \right]}{\prod_{\nu=1}^m s n^2 \left[ \frac{2\nu-1}{n} K; k \right]} \dots \dots \dots (8).$$

Der Beweis für diese Behauptungen findet sich in Anhang II.

## II. Eigenschaften der Z-Funktionen

### 1. Verhalten für reelle $z$

1.1. Das Verhalten im 0-Approximations-Intervall  $-\sqrt{k} \leq z \leq \sqrt{k}$  läßt sich unmittelbar aus der Parameter-Darstellung (Gl. (5) und (6)) ablesen. Durchläuft die Hilfsvariable  $v$  das Intervall  $-1$  bis  $+1$ , so oszilliert  $w$  zwischen den Werten  $-\sqrt{k_1}$  und  $+\sqrt{k_1}$ , und zwar wird der Wertebereich zwischen diesen Werten genau  $n$  mal durchlaufen, wie es die Prinzip-Skizzen von Bild 1 zeigen.

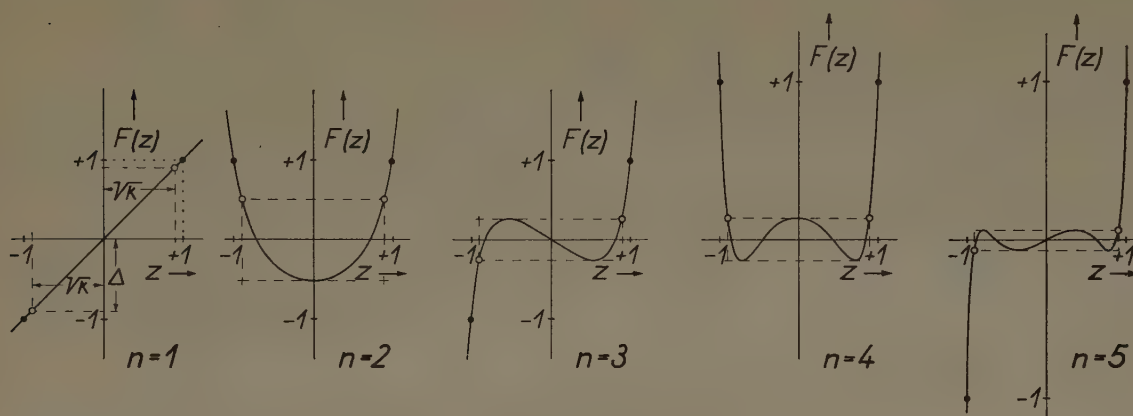


Bild 1. Grundsätzlicher Verlauf der Z-Funktion für die Grade  $n=1$  bis  $n=5$

Die maximale Abweichung vom Wert 0 wird also durch die Zahl

$$\Delta = \sqrt{k_1} = (\sqrt{k})^n \prod_{\nu=1}^m s n^2 \left[ \frac{2\nu-1}{n} K; k \right] \dots \dots \dots (9)$$

gegeben. Gl. (9) verknüpft die Approximationsgenauigkeit  $\Delta$  mit dem durch  $\sqrt{k}$  gegebenen Intervall. Bild 2 stellt diesen Zusammenhang dar. Aufgetragen ist  $1/\Delta$  abhängig von  $\sqrt{k}$  für die Grade  $n=1$  bis 12. Man sieht, wie rasch die Güte der Approximation mit wachsendem  $n$  zunimmt. Ist ein Wertepaar  $\Delta$  und  $\sqrt{k}$  als erwünscht vorgeschrieben, so kann man Bild 2 den Mindestgrad entnehmen, mit dem  $|F(z)| \leq \Delta$  im Intervall  $|z| \leq \sqrt{k}$  erreichbar ist.

Die  $n$  einfachen Nullstellen sind diejenigen im Intervall liegenden Stellen an denen  $nv$  bzw.  $nv+1$  eine gerade Zahl ist, also, wie es wegen Gl. (2) sein muß, die Stellen

$$z = 0 \quad \text{und} \quad \pm a_{2\nu} \quad | \quad z = \pm a_{2\nu-1} \quad \cdot$$

nach Gl. (3);  $\nu = 1 \dots m$ .

Die  $n-1$  Extrema sind diejenigen im Intervall liegenden Stellen, an denen  $nv$  bzw.  $nv+1$  eine ungerade Zahl ist, also mit

$$a_{2\nu-1} = \sqrt{k} s n \left[ \frac{2\nu-1}{n} K; k \right] \quad | \quad a_{2\nu-2} = \sqrt{k} s n \left[ \frac{2\nu-2}{n} K; k \right] \dots \dots (10)$$

die Stellen

$$z = \pm a_{2\nu-1} \quad (\nu = 1 \dots m) \quad | \quad z = 0 \quad \text{und} \quad \pm a_{2\nu-2} \quad (\nu = 1 \dots m).$$

Die Extremalwerte  $\pm \Delta$  werden auch an den beiden Intervallgrenzen  $\pm \sqrt{k}$  angenommen und zwar der Wert  $+\Delta$  bei  $z = +\sqrt{k}$  und der Wert  $(-1)^n \Delta$  bei  $z = -\sqrt{k}$ . Jedoch sind diese Stellen keine Extrema.

Mittels der Parameter  $a$  lassen sich die Approximationskonstante  $\Delta$  und die reelle Viertelperiode  $K_1$  (der Gl. (6)) so ausdrücken:

$$\Delta = \sqrt{k} \prod_{v=1}^m a_{2v-1}^2 \quad \Delta = \prod_{v=1}^m a_{2v-1}^2 \quad \dots \dots \dots (11)$$

$$K_1 = \frac{1}{n} K \frac{\prod_{v=1}^m a_{2v}^2}{\prod_{v=1}^m a_{2v-1}^2} \quad K_1 = \frac{1}{n} K \frac{\prod_{v=1}^m a_{2v-2}^2}{\prod_{v=1}^m a_{2v-1}^2} \quad \dots \dots \dots (12)$$

Gl. (11) folgt unmittelbar aus den Gl. (3), (9) und (10), Gl. (12) aus den Gl. (3), (8) und (10).

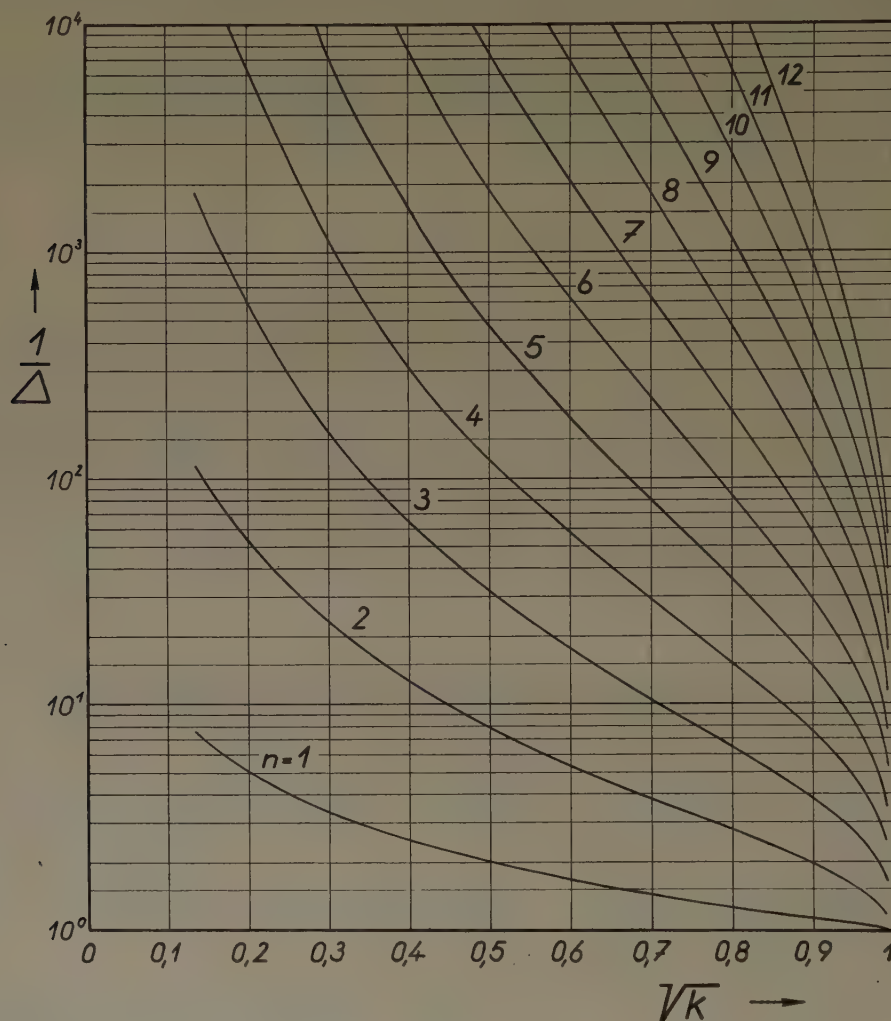


Bild 2. Approximationsgüte  $1/\Delta$  als Funktion von  $\sqrt{k}$  Parameter: Grad  $n$  der Funktion  $F(z)$

1.2. Das Verhalten im  $\infty$ -Approximations-Intervall  $z \leq -\frac{1}{\sqrt{k}}$  und  $z \geq +\frac{1}{\sqrt{k}}$  ergibt sich einfach aus der Eigenschaft (b), welche besagt, daß, wenn  $F(z)$  bei  $z = z_1$  den Wert  $c$  annimmt,  $F(z)$  an der Stelle  $z = 1/z_1$  den Wert  $1/c$  annimmt.

Insbesondere liegen die  $n$  einfachen Pole bei

$$z = \infty \text{ und } \pm 1/a_{2v} \quad z = \pm 1/a_{2v-1} \\ (v = 1 \dots m) \quad (v = 1 \dots m)$$

und zwischen ihnen die  $n-1$  Extrema

$$z = \pm 1/a_{2v-1} \quad z = \infty \text{ und } \pm 1/a_{2v-2} \\ (v = 1 \dots m) \quad (v = 1 \dots m),$$

wobei reziprok zu einem Minimum jeweils ein Maximum liegt und umgekehrt.

Der Wert der Extrema ist  $\pm 1/\Delta$  und es ist im Intervall stets  $|F(z)| \geq 1/\Delta$ . Die Werte  $\pm 1/\Delta$  werden auch an den beiden Intervallgrenzen  $\pm 1/\sqrt{k}$  angenommen, und zwar der Wert  $+1/\Delta$  bei  $z = +1/\sqrt{k}$  und der Wert  $(-1)^n 1/\Delta$  bei  $z = -1/\sqrt{k}$ . Auch diese Stellen sind keine Extrema.

1. 3. Das Verhalten in den Übergangs-Intervallen  $-\frac{1}{\sqrt{k}} \leq z \leq -\sqrt{k}$  und  $+\sqrt{k} \leq z \leq +\frac{1}{\sqrt{k}}$  kann ebenfalls aus der Parameter-Darstellung der Gl. (5) und (6) entnommen werden. Wegen der Eigenschaft (d) (die Funktionen sind ungerade oder gerade) genügt es, nur das positive Intervall zu betrachten. Man erhält das Gewünschte, wenn man das Argument  $vK$  vom Punkt  $K$  aus in imaginärer Richtung laufen läßt. Die so gewonnene Darstellung, welche die reellen Werte von  $z$  und  $w$  durch eine komplexe unabhängige Variable aus drückt, kann aber durch eine einfache, der Theorie der elliptischen Funktionen entnommene Transformation reell gemacht werden. Das Ergebnis lautet mit der Hilfsvariablen  $y$

$$z(y) = \frac{\sqrt{k}}{dn[yK'; k']} \cdot \dots \cdot \dots \cdot (13),$$

$$w(y) = \frac{\sqrt{k_1}}{dn[yK'_1; k'_1]} \cdot \dots \cdot \dots \cdot (14).$$

Hierin bedeuten  $k' = \sqrt{1 - k^2}$  und  $k'_1 = \sqrt{1 - k_1^2}$  die zu  $k$  und  $k_1$  komplementären Moduln,  $K'$  und  $K'_1$  die zugehörigen reellen Viertelperioden,  $dn$  das Zeichen für die J a c o b i s c h e elliptische Funktion delta amplitudinis.

Die Funktionen  $z(y)$  und  $w(y)$  oszillieren zwischen den Werten  $\sqrt{k}$  und  $1/\sqrt{k}$  bzw.  $\sqrt{k_1}$  und  $1/\sqrt{k_1}$ . Sie haben die Symmetrie-Eigenschaft

$$z\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{1}{z\left(\frac{1}{2} + x\right)}, \quad w\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{1}{w\left(\frac{1}{2} + x\right)} \cdot \dots \cdot \dots \cdot (15),$$

in Übereinstimmung mit der Eigenschaft  $F(1/z) = 1/F(z)$ . Durchläuft  $y$  das Intervall 0 über  $1/2$  nach 1, so durchläuft  $z$  monoton das positive Übergangsintervall  $\sqrt{k}$  über 1 nach  $1/\sqrt{k}$  und  $w$  monoton die Werte  $\sqrt{k_1} = \Delta$  über 1 nach  $1/\Delta$ . Gl. (13) und (14) sind einfache Konsequenzen der Formel (9) des Anhangs I, die Gl. (15) solche der Formel (12) Anhang I.

## 2. Verhalten für komplexe $z$

Einige allgemeine Regeln für das Verhalten im Komplexen lassen sich sofort aufstellen:

(α) Außerhalb der reellen Achse liegen weder Pole noch Nullstellen, da nämlich alle  $n$  möglichen Pole und Nullstellen auf der reellen Achse (einschl.  $z = 0$  und  $\infty$  bei den ungeraden Funktionen) liegen. Aus den Grundeigenschaften (a) und (b) folgt:

$$(\beta) |F(z)| \gtrless 1 \quad \text{für} \quad |z| \gtrless 1.$$

Weiter ist leicht einzusehen, daß außer den Werten 0 und  $\infty$  auch:

(γ) die reellen Werte  $w$  mit Beträgen  $|w| \leq \Delta$  und  $|w| \geq 1/\Delta$  nur auf der reellen Achse angenommen werden.

Schließlich:

(δ) Durchläuft  $(-1)^m z$  die imaginäre Achse von  $-i\infty$  bis 0 und dann von 0 bis  $+i\infty$ , so durchläuft  $w$ :

bei ungeraden $F(z)$	bei geraden $F(z)$
monoton ansteigend die imaginären Werte	monoton absteigend die positiven Werte
$-i\infty$ bis 0 und dann	$+1/\Delta$ bis $+\Delta$ und dann
0 bis $+i\infty$ .	monoton ansteigend die Werte
	$+\Delta$ bis $+1/\Delta$ .

Alles das kann aus den Formeln (2) und (6) ohne Mühe entnommen werden.

III. Lösungen der Gleichungen  $F(z) = \text{const.}$ 

Bei den technischen Anwendungen der Z-Funktionen kommt häufig die Aufgabe vor, die jeweils  $n$  Wurzeln der Gleichungen:

- 1)  $F(z) = \text{reelle Konstante}$
- 2)  $F(z) = \text{imaginäre Konstante}$
- 3)  $F(z) = \text{komplexe Konstante vom Betrag 1}$

zu bestimmen. Die nächsten Abschnitte geben die Lösung dieser drei Aufgaben.

1.  $F(z) = A$  ( $A$  reell)

Hier muß man unterscheiden, ob  $|A|$  im Intervall  $\Delta \leq |A| \leq 1/\Delta$  oder außerhalb liegt. Im letzteren Fall sind die  $n$  Wurzeln alle reell.

1. 1  $|A| \leq \Delta = \sqrt{k_1}$ .

Die Substitution

$$v = v_p = 1 - \frac{2v-1}{n} \pm (-1)^{v-1} x$$

führt die Gln. (6) sowohl im ungeraden, wie im geraden Fall unabhängig von  $v$  über in:

$$w = \pm \sqrt{k_1} \operatorname{sn} [n x K_1; k_1].$$

Ist  $x$  die auf das Intervall  $0 < x < 1/n$  beschränkte Lösung der Gleichung

$$\sqrt{k_1} \operatorname{sn} [n x K_1; k_1] = |A|,$$

also der Wert:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{n K_1} F(k_1; \varphi) \text{ mit } ^3) \\ \varphi &= \arcsin (|A|/\sqrt{k_1}) \quad \left( 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16),$$

so sind die  $n$  gesuchten Wurzeln  $z_v$  ( $v = 1 \dots n$ ) der Gleichung  $F(z) = A$  gegeben durch

$$z_v = \sqrt{k} \operatorname{sn} \left[ \left( 1 - \frac{2v-1}{n} \pm (-1)^{v-1} x \right) K; k \right] \dots \dots \dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned} &\text{oberes} \\ &\text{unteres} \end{aligned} \right\} \text{Vorzeichen für } A \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}.$$

Sie liegen im Intervall  $-\sqrt{k} \leq z_v \leq +\sqrt{k}$ . In den beiden Grenzfällen  $A = 0$  bzw.  $|A| = \sqrt{k_1} = \Delta$  kommt man — in anderer Numerierung — auf die Nullstellen nach Gl. (3) bzw. die Extrema nach Gl. (10) zurück. Diese letzteren sind doppelte  $+A$ - oder  $-A$ -Stellen. Außerdem treten dann noch die Stellen  $\pm \sqrt{k}$  als einfache Wurzeln auf, und zwar für

ungerade  $F(z)$ ;  $n = 2m + 1$

gerade  $F(z)$ ;  $n = 2m$

die Stelle  $z_1 = \sqrt{k}$  als Lösung  
von  $F(z) = +A$ ,

die Stelle  $z_n = -\sqrt{k}$  als Lösung  
von  $F(z) = -A$ .

die Stellen  $z_1 = \sqrt{k}$  und  $z_n = -\sqrt{k}$   
als Lösung von  $F(z) = +A$ . } . . (18)

1. 2  $|A| \geq 1/\Delta = 1/\sqrt{k_1}$ .

Wegen der Reziprozitäts-Eigenschaft (b) von  $F(z)$  haben wir hier an Stelle von Gl. (16) und (17) einfach:

$$x_1 = \frac{1}{n K_1} F(k_1; \varphi_1) \quad \text{mit} \quad \varphi_1 = \arcsin \left( \frac{1}{|A| \sqrt{k_1}} \right) \quad \left( 0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2} \right) \dots \dots (19)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{z_v} &= \sqrt{k} \operatorname{sn} \left[ \left( 1 - \frac{2v-1}{n} \pm (-1)^{v-1} x \right) K; k \right] \dots \dots \dots (20). \\ &\left. \begin{aligned} &\text{oberes} \\ &\text{unteres} \end{aligned} \right\} \text{Vorzeichen für } A \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}.$$

Die  $\frac{1}{z_v}$  liegen im Intervall  $-\sqrt{k} \leq \frac{1}{z_v} \leq +\sqrt{k}$ .

<sup>3)</sup>  $F(k; \varphi)$  ist hier und im Folgenden eine Abkürzung für das unvollständige elliptische Integral 1. Art (nicht zu verwechseln mit  $F(z)$ ),

$$F(k; \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\tau}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau}}.$$

In den Grenzfällen  $A = \infty$  bzw.  $|A| = 1/\sqrt{k_1} = 1/A$  kommen wir auf die Pole und die Extrema nach II. Abs. 1.2 zurück. Letztere sind dann Doppelwurzeln, zu denen gegebenenfalls sinngemäß zu Regel (8) noch die einfachen Wurzeln  $\pm 1/\sqrt{k}$  treten.

1. 3.  $A < |A| < 1/A$ .

Die Substitution  $v = v_\nu = 1 - \frac{2\nu}{n} + iy \frac{K'}{K}$  führt<sup>4)</sup> die Gln. (6) sowohl im ungeraden, wie im geraden Fall über in:

$$w = (-1)^\nu \sqrt{k_1} sn [K_1 \pm iy K'_1] = \frac{(-1)^\nu \sqrt{k_1}}{dn[y K'_1; k'_1]} \quad (21),$$

und zwar für beide Vorzeichen des imaginären Bestandteils von  $v_\nu$ .

Ist daher  $y$  die zwischen 0 und +1 liegende Lösung der Gleichung

$$dn[y K'_1; k'_1] = \frac{\sqrt{k_1}}{|A|} \quad (22),$$

deren rechte Seite eine Zahl zwischen 1 und  $k_1$  ist, also die Zahl

$$y = \frac{1}{K'_1} F(k'_1; \varphi) \quad \text{mit } \varphi = \arcsin \frac{1}{k'_1} \sqrt{1 - k_1/A^2} \quad \left(0 < \varphi < \frac{\varphi}{2}\right) \quad (23),$$

so sind die  $2n$  Lösungen der Gl.  $F^2(z) = A^2$  gegeben durch:

$$z_\nu = \sqrt{k} sn \left[ \left(1 - \frac{2\nu}{n}\right) K \pm iy K'; k \right] \quad (\nu = 0, 1, \dots, n) \quad (24).$$

Der erste und letzte Index  $\nu$  liefert nur je eine Lösung, und zwar eine reelle, nämlich:

$$\left. \begin{matrix} z_0 \\ z_n \end{matrix} \right\} = \pm \left\{ \frac{\sqrt{k}}{dn[y K'; k']} \right\} \quad (24a),$$

alle übrigen jedoch je zwei konjugiert komplexe Lösungen.

Die zu  $\left. \begin{matrix} \text{geraden} \\ \text{ungeraden} \end{matrix} \right\}$  Indices  $\nu$  gehörenden Lösungen sind wegen Gl. (21) Lösungen der Gleichung  $F(z) = \left\{ \begin{matrix} + |A| \\ - |A| \end{matrix} \right\}$ .

Die komplexen Zahlen  $z_\nu$  mit  $\nu = 1 \dots n-1$  lassen sich reell in der Form

$$z = \xi_\nu + i \eta_\nu \quad (25)$$

schreiben. Es ist

$$\left. \begin{matrix} \xi_\nu = \sqrt{k} \frac{s_1 d'_2}{c_2'^2 + (k s_1 s_2')^2} \\ \eta_\nu = \pm \sqrt{k} \frac{c_1 d_1 s'_2 c'_2}{c_2'^2 + (k s_1 s_2')^2} \end{matrix} \right\} \quad (\text{beide Vorzeichen}) \quad (26)$$

mit den Abkürzungen<sup>7)</sup>

$$\left. \begin{matrix} s_1 = sn \left[ \left(1 - \frac{2\nu}{n}\right) K; k \right]; \\ c_1 = cn \left[ \left(1 - \frac{2\nu}{n}\right) K; k \right]; \\ d_1 = dn \left[ \left(1 - \frac{2\nu}{n}\right) K; k \right]; \end{matrix} \right\} \quad (27),$$

$$s'_2 = sn[y K'; k']; \quad c'_2 = cn[y K'; k']; \quad d'_2 = dn[y K'; k'] \quad (28)$$

Für  $\nu = 0$  ( $s_1 = 1$ ;  $c_1 = 0$ ;) und  $\nu = n$  ( $s_1 = -1$ ;  $c_1 = 0$ ) ergeben sich wieder die Ausdrücke (24a). Ist der Grad  $n = 2m$  gerade, so folgen für  $\nu = m$  zwei rein imaginäre Lösungen, nämlich (wegen  $s_1 = 0$ ;  $c_1 = d_1 = 1$ )

$$\xi_m = 0; \quad \eta_m = \pm \sqrt{k} sc[y K'; k'] \quad (26a).$$

<sup>4)</sup> unter Berücksichtigung der in Anhang II Gl. (7) abgeleiteten Beziehung:  $K'_1/K_1 = n K'/K$ .

<sup>5)</sup> vgl. die Formel 9 des Anhang I.

<sup>6)</sup> In den Grenzfällen  $A^2 = k_1$  und  $A^2 = 1/k_1$  wird  
 $\varphi = 0$  und  $\varphi = \pi/2$   
 $y = 0$  und  $y = 1$ .

<sup>7)</sup> Außer den bereits benützten Funktionen  $sn u$  und  $dn u = \sqrt{1 - k^2 sn^2 u}$  tritt hier auch die Funktion  $cn u = \sqrt{1 - sn^2 u}$  (cosinus amplitudinis) auf, weiter unten auch noch die Funktion  $sc u = \frac{sn u}{cn u}$  (tangens amplitudinis).

Im Spezialfall  $A^2 = 1$

ergeben die Gl. (26) (wegen  $y = \frac{1}{2}$ ;  $s_2' = \sqrt{\frac{1}{1+k}}$ ;  $c_2' = \sqrt{\frac{k}{1+k}}$ ;  $d_2' = \sqrt{k}$ )  
die Lösung der Gleichung

$$w = (-1)^v$$

durch;

$$\xi_v = (1+k) \frac{s_1}{1+k \cdot s_1^2}; \quad \eta_v = \pm \frac{c_1 d_1}{1+k \cdot s_1^2} \quad (\text{beide Vorzeichen}) \dots (26b)$$

für  $|A| = 1 \quad (v = 1 \dots n-1),$

wobei  $\xi_v^2 + \eta_v^2 = 1$ , wie es sein muß, da diese Punkte auf dem Einheitskreis liegen. Für  $v = 0$  ergibt sich natürlich  $\xi_0 = 1$ ;  $\eta_0 = 0$  und für  $v = n$ :  $\xi_n = -1$ ;  $\eta_n = 0$ .

## 2. $F(z) = iB$ ( $B$ reell)

Die Imaginärstellen von  $F(z)$  findet man durch die Substitution von

$$v = v_v = 1 - \frac{2v-1}{n} + (-1)^{v-1} i y \frac{K'}{K}$$

in die Gleichungen (6). Man erhält:

$$w = \sqrt{k_1} \operatorname{sn} [i y K_1'; k_1] = i \sqrt{k_1} \operatorname{sc} [y K_1'; k_1'] \dots (29).$$

Ist daher  $y$  die zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$  liegende Lösung der Gleichung

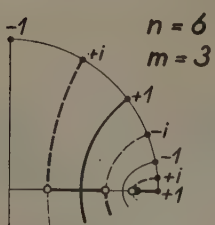
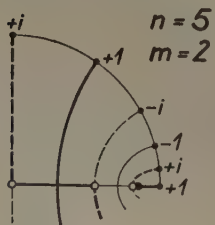
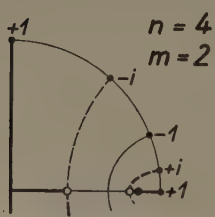
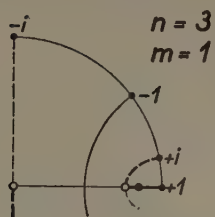
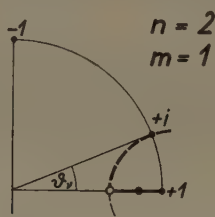
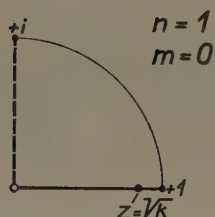
$$\operatorname{sc} [y K_1'; k_1'] = B/\sqrt{k_1} \dots (30),$$

deren rechte Seite eine beliebige positive oder negative reelle Zahl ist, also die Zahl <sup>8)</sup>

$$y = \frac{1}{K_1'} F(k_1', \varphi) \quad \text{mit} \quad \varphi = \operatorname{arctg} B/\sqrt{k_1}; \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq +\frac{\pi}{2}\right) \dots (31),$$

so ergeben sich die  $n$  Lösungen der Gleichung  $F(z) = iB$  aus:

$$z_v = \sqrt{k} \operatorname{sn} \left[ \left(1 - \frac{2v-1}{n}\right) K + (-1)^{v-1} i y K'; k \right] \quad (v = 1 \dots n) \dots (32).$$



—  $F(z)$  positiv reell  
—  $F(z)$  negativ reell  
- - -  $F(z)$  positiv imaginär  
- - -  $F(z)$  negativ imaginär

○ Nullstellen von  $F(z)$   
× Pole

Bild 3a. Verlauf der Kurven in der komplexen  $z$ -Ebene, auf denen  $F(z)$  rein reelle und rein imaginäre Werte annimmt, für die Grade  $n = 1$  bis  $n = 6$  im 1. Quadranten des Einheitskreises

Für  $B = 0$ ;  $y = 0$  ergeben sich wieder die reellen Nullstellen, für  $B = \infty$ ;  $y = \pm 1$  die reellen Pole der Funktion  $F(z)$ . Für endliches und von Null verschiedenes  $B$  hingegen sind alle  $z_v$  komplex.

Die komplexen Zahlen  $z_v$  lassen sich wiederum reell in der Form

$$z_v = \xi_v + i \eta_v \quad (v = 1 \dots n) \quad (33)$$

schreiben. Es ist

$$\left. \begin{aligned} \xi_v &= \sqrt{k} \frac{s_1 d_2'}{c_2'^2 + (k s_1 s_2')^2}, \\ \eta_v &= (-1)^{v-1} \sqrt{k} \frac{c_1 d_1 s_2' c_2'}{c_2'^2 + (k s_1 s_2')^2} \end{aligned} \right\} \dots (34)$$

mit den Abkürzungen <sup>9)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \operatorname{sn} \left[ \left(1 - \frac{2v-1}{n}\right) K; k \right]; \\ c_1 &= \operatorname{cn} \left[ \left(1 - \frac{2v-1}{n}\right) K; k \right]; \\ d_1 &= \operatorname{dn} \left[ \left(1 - \frac{2v-1}{n}\right) K; k \right] \end{aligned} \right\} \dots (35),$$

$$\left. \begin{aligned} s_2' &= \operatorname{sn} [y K'; k'], \quad c_2' = \operatorname{cn} [y K'; k'], \\ d_2' &= \operatorname{dn} [y K'; k'] \end{aligned} \right\} \quad (36).$$

<sup>8)</sup> Ist  $B$  negativ, so rechnet man zweckmäßig mit  $|B|$  und kehrt dann das Zeichen von  $y$  um.

<sup>9)</sup> Bei den Gl. (36) ist zu beachten, daß  $y$  positiv oder negativ sein kann und daß  $\operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn} u$ ;  $\operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn} u$ ;  $\operatorname{dn}(-u) = \operatorname{dn} u$ .

Ist der Grad  $n = 2m + 1$  ungerade, so liefert der mittlere Index  $\nu = m + 1$  eine rein imaginäre Lösung. Dann ist nämlich  $s_1 = 0$ ;  $c_1 = d_1 = 1$ , und es ergibt sich:

$$\xi_{m+1} = 0 \quad \text{und} \quad \eta_{m+1} = (-1)^m \operatorname{sc}[yK'; k'] \quad \dots \quad (34a).$$

Bild 3 zeigt grundsätzlich den Verlauf der Kurven in der  $z$ -Ebene, auf denen  $F(z)$  rein reelle und rein imaginäre Werte annimmt, für die Grade  $n = 1$  bis  $n = 6$  nur im 1. Quadranten des Einheitskreises, für  $n = 5$  und  $n = 6$  dann noch ausführlicher in der ganzen komplexen Ebene.

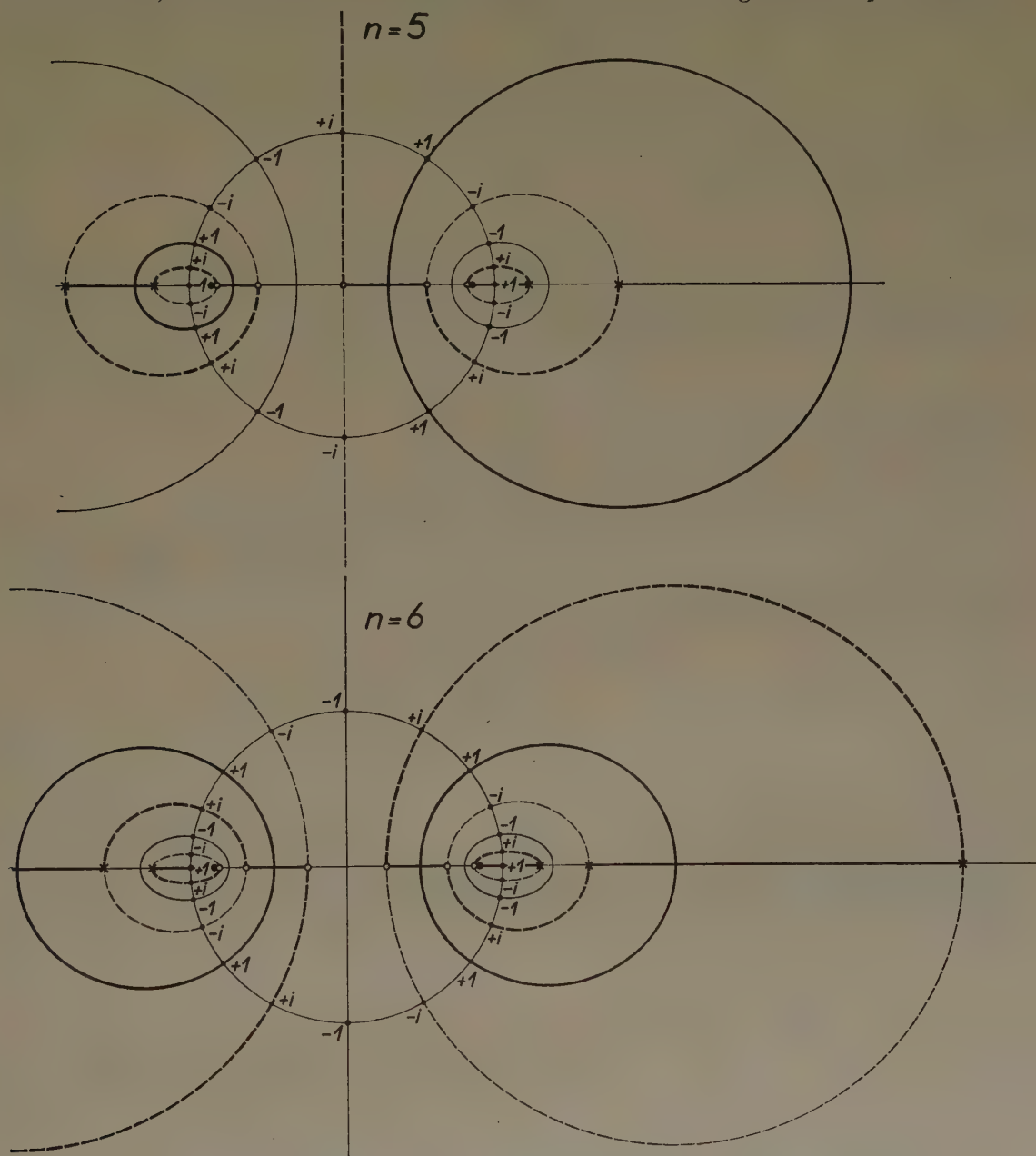


Bild 3b. Verlauf der Kurven in der komplexen  $z$ -Ebene, auf denen  $F(z)$  rein reelle und rein imaginäre Werte annimmt, für die Grade  $n = 5$  u.  $n = 6$  Zeichenerklärung siehe Bild 3a

Im Spezialfall  $B = \pm 1$  ergeben die Gl. (34) (wegen  $y = \frac{1}{2}$ ;  $s'_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{1+k}}$ ;  
 $c'_2 = \sqrt{\frac{k}{1+k}}$ ;  $d'_2 = \sqrt{k}$ )

$$\xi_\nu = (1+k) \frac{s_1}{1+k s_1^2}; \quad \eta_\nu = \pm (=1)^{\nu-1} \frac{c_1 d_1}{1+k s_1^2} \quad (\nu = 1 \dots n) \quad \dots \quad (34b),$$

wobei wieder  $\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2 = 1$  ist, die Abkürzungen nach Gl. (35) zu benutzen sind und in der Gleichung für  $\eta_\nu$  das obere (untere) Zeichen zu nehmen ist, wenn  $B = +1$  ( $-1$ ) ist.

3.  $F(z) = e^{i\varphi}$ 

Die auf dem Einheitskreis gelegenen  $n$  Stellen  $z_\nu = e^{i\varphi_\nu}$  ( $\nu = 0, 1, \dots, n-1$ ), an denen  $F(z)$  den vorgeschriebenen Wert  $e^{i\varphi}$  annimmt, findet man durch die Substitution von

$$v = v_\nu = 1 - x - \frac{4\nu}{n} + \frac{i}{2} \frac{K'}{K}$$

in die Gleichungen (5) und (6). Man erhält zunächst (sowohl im ungeraden wie im geraden Fall):

$$e^{i\varphi_\nu} = z_\nu = \sqrt{k} \operatorname{sn} \left[ \left( 1 - x - \frac{4\nu}{n} \right) K + \frac{i}{2} K'; k \right] \dots \dots \dots (37),$$

$$e^{i\varphi} = w = \sqrt{k_1} \operatorname{sn} \left[ (1 - nx) K_1 + \frac{i}{2} K_1'; k_1 \right] \dots \dots \dots (38).$$

Die Gl. (37) und (38) können mittels einer Modul-Transformation reell geschrieben werden (Beweis vgl. Anhang III) nämlich:

$$\varphi_\nu = \frac{\pi}{2} + am \left[ \left( x + \frac{4\nu}{n} - 1 \right) K_3; k_3 \right] \dots \dots \dots (39),$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + am [(nx - 1) K_2; k_2] \dots \dots \dots (40).$$

Die hierin auftretenden neuen Moduln  $k_2$  und  $k_3$  sind gegeben durch

$$k_2 = \frac{2\sqrt{k_1}}{1 + k_1} \quad \text{und} \quad k_3 = \frac{2\sqrt{k}}{1 + k} \dots \dots \dots (41).$$

Die zugehörigen reellen Viertelperioden  $K_2$  und  $K_3$  durch

$$K_2 = (1 + k_1) K_1 \quad \text{und} \quad K_3 = (1 + k) K \dots \dots \dots (42).$$

Das Funktionszeichen  $am$  bedeutet die J a c o b i s c h e (elliptische) Amplitude.

Wählt man  $\varphi$  aus dem Intervall  $-\pi < \varphi \leq +\pi$ , so wird durch Gl. (40) diesem Wert ein im Intervall  $-\frac{2}{n} < x \leq +\frac{2}{n}$  liegender Wert von  $x$  eindeutig zugeordnet. Man erhält ihn aus der Auflösung von Gl. (40) zu

$$x = \frac{1}{n} \left[ 1 - \frac{1}{K_2} F \left( k_2; \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right] \dots \dots \dots (43),$$

worin

$$F \left( k_2; \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \int_0^{\frac{\pi}{2} - \varphi} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 \tau}} \dots \dots \dots (44).$$

das unvollständige elliptische Integral 1. Art zum Modul  $k_2$  ist <sup>10)</sup>. In den Gl. (43) und (44) kommen Winkel zwischen  $-3\frac{\pi}{2}$  und  $+\frac{\pi}{2}$  vor. Das ist unbequem. Man benützt daher besser für die vier Quadranten verschiedene (aus den Eigenschaften der Funktion  $am$  leicht beweisbare) Formeln:

<p>1. Quadrant: <math>0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}</math></p> $x = \frac{1}{n} \left[ 1 - \frac{1}{K_2} F(k_2; \psi) \right]$ <p>mit <math>\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi</math></p>	<p>2. Quadrant: <math>\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi</math></p> $x = \frac{1}{n} \left[ 1 + \frac{1}{K_2} F(k_2; \psi) \right]$ <p>mit <math>\psi = \varphi - \frac{\pi}{2}</math></p>	$\left. \vphantom{\begin{matrix} 1. \\ 2. \\ 3. \\ 4. \end{matrix}} \right\} \quad (45)$
<p>3. Quadrant: <math>-\pi &lt; \varphi \leq -\frac{\pi}{2}</math></p> $x = -\frac{1}{n} \left[ 1 + \frac{1}{K_2} F(k_2; \psi) \right]$ <p>mit <math>\psi = -\varphi - \frac{\pi}{2}</math></p>	<p>4. Quadrant: <math>-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0</math></p> $x = -\frac{1}{n} \left[ 1 - \frac{1}{K_2} F(k_2; \psi) \right]$ <p>mit <math>\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi</math></p>	

Der in ihnen vorkommende Winkel  $\psi$  liegt in allen Fällen zwischen 0 und  $\frac{\pi}{2}$ .

<sup>10)</sup> Die Formel (43) läßt sich mit  $F_c(k_2; \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\tau}{\sqrt{1 - k_2^2 \cos^2 \tau}}$  (44a) auch  $x = \frac{1}{n K_2} F_c(k_2; \varphi)$  (43a) schreiben.

Ist  $x$  aus einer der vier Gleichungen (45) bestimmt, so folgen die gesuchten  $n$  Werte von  $\vartheta_\nu$  aus der Gl. (39), wenn man  $\nu$   $n$  aufeinanderfolgende positive oder negative ganze Zahlen durchlaufen läßt. Zweckmäßig zählt man von  $\nu = 0$  bis  $n - 1$ , wenn  $x \geq 0$  und von  $\nu = 1$  bis  $n$ , wenn  $x < 0$ . Dann liegen alle  $n$  Werte  $\vartheta_\nu$  im Intervall  $0 \leq \vartheta_\nu < 2\pi$ .

Für die numerische Rechnung ist noch anzumerken, daß  $am(-u) = -am(u)$ ;  $am(u \pm 2K) = am u \pm \pi$  ist. Damit kann man alle Berechnungen auf solche des 1. Quadranten zurückführen.

### Spezialfälle.

Von besonderer Bedeutung sind die Spezialfälle:

$$\varphi = \frac{0}{\pi} \quad \text{d. h.} \quad w = \pm 1 \quad \dots \dots \dots (\alpha)$$

und

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{d. h.} \quad w = \pm i \quad \dots \dots \dots (\beta).$$

Sie sind in den Abschnitten 3.1 und 3.2 bereits behandelt. Dort sind die zugehörigen, auf dem Einheitskreis liegenden  $z$ -Punkte in rechtwinkligen Koordinaten berechnet worden. Hier erhalten wir die Lösung in Form des arcus. Fassen wir die Lösungen der jeweils zwei, unter  $(\alpha)$  und  $(\beta)$  formulierten Aufgaben zusammen, so liefern die Gl. (39) und (45) mit leicht geänderter Zählweise das Ergebnis:

### Aufgabe $(\alpha)$

$$w = (-1)^\nu \quad \dots \dots \dots (46)$$

mit

$$\vartheta_\nu = \frac{\pi}{2} + am \left[ \left( \frac{2\nu}{n} - 1 \right) K_3; k_3 \right] \quad (\nu = 0 \dots 2n - 1) \quad \dots \dots (47).$$

Es genügt wegen der Symmetrie der Lösungen  $m$  Zahlenwerte zu berechnen ( $n = 2m + 1$  im ungeraden,  $n = 2m$  im geraden Fall), nämlich die im 1. Quadranten liegenden Winkel  $\vartheta_1 \dots \vartheta_m$ .

Es ist

$$\left. \begin{array}{l} \vartheta_0 = 0 \\ \vartheta_\nu = \frac{\pi}{2} - am \left[ \left( 1 - \frac{2\nu}{n} \right) K_3; k_3 \right] \quad (\nu = 1 \dots m) \\ \vartheta_{n-\nu} = \pi - \vartheta_\nu \\ \vartheta_n = \pi \\ \vartheta_{n+\nu} = \pi + \vartheta_\nu \\ \vartheta_{2n-\nu} = 2\pi - \vartheta_\nu \end{array} \right\} \quad (\nu = 1 \dots m) \quad \dots \dots (48).$$

Im ungeraden Fall erhält man durch Gl. (48) genau  $2n$  verschiedene Werte, im geraden Fall zwei Werte doppelt, nämlich  $\vartheta_{n-m} = \vartheta_m = \frac{\pi}{2}$  und  $\vartheta_{n+m} = \vartheta_{2n-m} = 3\frac{\pi}{2}$ , also wieder genau  $2n$  verschiedene Werte, wie es sein muß.

### Aufgabe $(\beta)$

$$w = (-1)^{\nu-1} i \quad \dots \dots \dots (49)$$

mit

$$\vartheta_\nu = \frac{\pi}{2} + am \left[ \left( \frac{2\nu-1}{n} - 1 \right) K_3; k_3 \right] \quad (\nu = 1 \dots 2n) \quad \dots \dots (50).$$

Auch hier genügt es,  $m$  Zahlenwerte zu berechnen, nämlich die im 1. Quadranten liegenden Winkel  $\vartheta_1 \dots \vartheta_m$ .

Es ist

$$\left. \begin{array}{l} \vartheta_\nu = \frac{\pi}{2} - am \left[ \left( 1 - \frac{2\nu-1}{n} \right) K_3; k_3 \right] \quad (\nu = 1 \dots m) \\ \vartheta_{n-\nu+1} = \pi - \vartheta_\nu \\ \vartheta_{n+\nu} = \pi + \vartheta_\nu \\ \vartheta_{2n-\nu+1} = 2\pi - \vartheta_\nu \end{array} \right\} \quad (\nu = 1 \dots m) \quad \dots \dots (51).$$

Gl. (51) liefern 4  $m$  verschiedene Lösungen. Das sind im geraden Fall alle. Im ungeraden Fall fehlen noch zwei, nämlich  $\vartheta_{m+1}$  und  $\vartheta_{3m+2}$ . Diese sind

$$\begin{aligned} \vartheta_{m+1} &= \frac{\pi}{2} \\ (\text{ungerader Fall}) \quad \vartheta_{3m+2} &= 3 \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (51a).$$

**Anmerkung.** Die numerische Auswertung der in dieser Arbeit enthaltenen Formeln wird sehr erleichtert durch die Tafel von E. Glowatzki<sup>11)</sup>. Seine Tafel enthält die Jacobische elliptische Amplitude  $\varphi$  als Funktion rationaler Bruchteile der reellen Viertelperiode  $K$  und des Modulwinkels  $\Theta = \arcsin k$ , also die Funktion

$$\varphi = am \left[ \frac{m}{n} K; \sin \Theta \right]$$

und zwar in dezimal unterteilten Graden der  $90^\circ$ -Skala mit 3 Dezimalstellen für  $n = 2, 3 \dots 12$ ;  $m = 1, 2 \dots n - 1$  und für ganzzahlige Werte des Modulwinkels  $\Theta$  von  $0$  bis  $90^\circ$ .

Die elliptischen Funktionen  $sn u = \sin \varphi$  und  $cn u = \cos \varphi$  können dann aus den Glowatzkischen Tafelwerten mit Hilfe passender trigonometrischer Tafeln, z. B. denjenigen von J. Peters<sup>12)</sup>, unschwer berechnet werden.

### Anhang I

Einige im Hauptteil benutzte Formeln aus der Theorie der Jacobischen elliptischen Funktionen<sup>13)</sup>

#### 1. Moduln und Perioden-Konstanten

Modul  $k$ ; komplementärer Modul  $k' = \sqrt{1 - k^2}$

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau}}; \quad K' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \tau}} \quad \dots \dots \dots (1).$$

#### 2. Die drei Funktionen $sn$ , $cn$ , $dn$ und ihre Umkehrungen

Es sei

$$F(k; \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\tau}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau}} \quad \dots \dots \dots (2).$$

Dann ist:

$$\left. \begin{aligned} am u &= \varphi, \\ x_s &= sn u = \sin \varphi \\ x_c &= cn u = \cos \varphi \\ x_d &= dn u = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}; \\ x_t &= \frac{sn u}{cn u} = \operatorname{tg} \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots (3a), \quad \left. \begin{aligned} u &= F(k; \varphi) \text{ mit:} \\ \varphi &= \arcsin x_s \\ \varphi &= \arccos x_c \\ \varphi &= \arcsin \frac{1}{k} \sqrt{1 - x_d^2} \\ \varphi &= \arctg x_t \end{aligned} \right\} \dots \dots (3b).$$

#### 3. Spezielle Werte:

$$\left. \begin{aligned} sn(0) &= 0; & cn(0) &= 1; & dn(0) &= 1 \\ sn \frac{K}{2} &= \sqrt{\frac{1}{1+k'}}; & cn \frac{K}{2} &= \sqrt{\frac{k'}{1+k'}}; & dn \frac{K}{2} &= \sqrt{k'} \\ sn K &= 1; & cn K &= 0; & dn K &= k' \\ sn \frac{iK'}{2} &= \frac{i}{\sqrt{k}}; & cn \frac{iK'}{2} &= \sqrt{\frac{1+k}{k}}; & dn \frac{iK'}{2} &= \sqrt{1+k} \\ sn iK' &= \infty; & cn iK' &= \infty; & dn iK' &= \infty \end{aligned} \right\} \dots \dots (4),$$

$$\left. \begin{aligned} sn \frac{iK'}{2} &= \frac{i}{\sqrt{k}}; & cn \frac{iK'}{2} &= \sqrt{\frac{1+k}{k}}; & dn \frac{iK'}{2} &= \sqrt{1+k} \\ sn iK' &= \infty; & cn iK' &= \infty; & dn iK' &= \infty \end{aligned} \right\} \dots \dots (5).$$

<sup>11)</sup> E. Glowatzki, Tafel der Jacobischen elliptischen Funktion  $\varphi = am \left[ \frac{m}{n} K \right]$ , Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Neue Folge Heft 61, 1953.

<sup>12)</sup> J. Peters (siehe Literaturverzeichnis bei <sup>11)</sup>).

<sup>13)</sup> Alle diese Formeln stehen entweder direkt in „Jahnke-Emde, Tafeln höherer Funktionen, 4. Auflage, Teubner 1948“ oder können aus dort stehenden durch leichte Spezialisierung gewonnen werden.

#### 4. Periodizität und Symmetrie-Eigenschaften der Funktion $sn$

$$\left. \begin{aligned} sn(-u) &= -sn u, \\ sn(2K \pm u) &= \mp sn u, \\ sn(4K \pm u) &= \pm sn u, \\ sn(iK' \pm u) &= \pm \frac{1}{k sn u}, \\ sn(2iK' \pm u) &= \pm sn u \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6).$$

#### 5. Die Funktion $sn$ für komplexe Argumente

Allgemein:

$$sn(x + iy) = \frac{s_1 \bar{d}_2' + i c_1 \bar{d}_1 s_2' c_2'}{c_2'^2 + (k s_1 s_2')^2} \dots \dots \dots (7)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= sn(x; k), & s_2' &= sn(y; k'), \\ c_1 &= cn(x; k), & c_2' &= cn(y; k'), \\ \bar{d}_1 &= dn(x; k), & \bar{d}_2' &= dn(y; k') \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7a).$$

Speziell:

$$a) \quad x = 0; \quad sn(iy; k) = i \frac{s_2'}{c_2'} \dots \dots \dots (8),$$

$$b) \quad x = K; \quad sn(K + iy; k) = \frac{1}{\bar{d}_2'} \dots \dots \dots (9),$$

$$c) \quad y = \frac{K'}{2}; \quad sn\left(x + i\frac{K'}{2}; k\right) = \frac{1}{\sqrt{k}} (\cos \psi + i \sin \psi) \dots \dots \dots (10)$$

mit

$$\cos \psi = (1 + k) \frac{s_1}{1 + k s_1^2}, \quad \sin \psi = \frac{c_1 \bar{d}_1}{1 + k s_1^2} \dots \dots \dots (10a).$$

#### 6. Zwei Additions-Theoreme

$$sn(u_1 + u_2) \cdot sn(u_1 - u_2) = \frac{sn^2 u_1 - sn^2 u_2}{1 - k^2 sn^2 u_1 \cdot sn^2 u_2} \dots \dots \dots (11),$$

$$dn\left(\frac{K}{2} - x\right) \cdot dn\left(\frac{K}{2} + x\right) = k' \dots \dots \dots (12).$$

#### 7. Ableitung der Funktion $sn$

$$\frac{d}{du} sn u = cn u \cdot dn u \dots \dots \dots (13).$$

#### 8. Eigenschaften der Funktion $am$

$$am(-u) = -am u, \quad am(2K \pm u) = \pi \pm am u \dots \dots \dots (14).$$

### Anhang II

Beweis der Parameter-Darstellung von  $F(z)$ .

Setzt man

$$z = \sqrt{k} sn[vK; k] \dots \dots \dots (1)$$

und

$$\left. \begin{aligned} n &= 2m + 1 \text{ (ungerader Fall)} \\ a_{2v} &= \sqrt{k} sn\left[\frac{2v}{n} K; k\right] \quad (v = 1 \dots m) \end{aligned} \right\} \dots (2a) \quad \left| \quad \begin{aligned} n &= 2m \text{ (gerader Fall)} \\ a_{2v-1} &= \sqrt{k} sn\left[\frac{2v-1}{n} K; k\right] \quad (v = 1 \dots m) \end{aligned} \right\} \dots (2b),$$

so erhält man für

$$w = F(z) = z \prod_{v=1}^m \frac{z^2 - a_{2v}^2}{1 - a_{2v}^2 z^2} \quad \left| \quad w = F(z) = \prod_{v=1}^m \frac{z^2 - a_{2v-1}^2}{1 - a_{2v-1}^2 z^2}$$

mittels Formel (11) des Anhangs I

$$w = k^{n/2} \prod_{\nu=-m}^{+m} \operatorname{sn} \left[ \left( v + \frac{2\nu-1}{n} \right) K; k \right] \quad \left| \quad w = k^{n/2} \prod_{\nu=1}^m \operatorname{sn} \left[ \left( v + \frac{2\nu-1}{n} \right) K; k \right] \cdot \operatorname{sn} \left[ \left( v - \frac{2\nu-1}{n} \right) K; k \right] \right.$$

oder mit Abänderung der Numerierung in beiden Fällen:

$$w = k^{n/2} \prod_{\nu=1}^n \operatorname{sn} \left[ \left( v - 1 + \frac{2\nu-1}{n} \right) K; k \right] \dots \dots \dots (3).$$

Das Ergebnis (1) und (3) schreibt sich etwas einfacher mit  $u = v - 1$  zu:

$$z = \sqrt{k} \operatorname{sn} [(u+1) K; k] \dots \dots \dots (4),$$

$$w = k^{n/2} \prod_{\nu=1}^n \operatorname{sn} \left[ \left( u + \frac{2\nu-1}{n} \right) K; k \right] \dots \dots \dots (5).$$

$w$  als Funktion von  $u$  ist nach Gl. (5) eine elliptische Funktion mit der reellen Periode  $\frac{4}{n}$  und der imaginären Periode  $2ix$  ( $x = K'/K$ ) und den in einem Periodenparallelogramm liegenden Nullstellen  $\frac{1}{n}$  und  $\frac{3}{n}$  und Polen  $\frac{1}{n} + iK$  und  $\frac{3}{n} + iK$ .

Dasselbe trifft zu von der Funktion

$$w_1 = C \operatorname{sn} [(nu+1) K_1; k_1] \dots \dots \dots (6),$$

in welcher der Modul  $k_1$  bestimmt ist durch das Periodenverhältnis

$$\kappa_1 = \frac{K'_1}{K_1} = n \cdot \frac{K'}{K} = n\kappa \dots \dots \dots (7)$$

und  $K_1$  das zugehörige vollständige elliptische Integral ist. Die Funktionen  $w_1$  und  $w$  können sich als elliptische Funktionen mit den gleichen Perioden und den gleichen Nullstellen und Polen nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden, sind also identisch, wenn man in Gl. (6) den Faktor  $C$  passend bestimmt. Setzt man in Gl. (5) und (6)  $u = i \frac{x}{2}$ , so erhält man

$$w = 1 \quad \text{und} \quad w_1 = C/\sqrt{k_1}.$$

Ersteres, weil in dem Produkt jeder der Faktoren nach Gl. (10) Anh. I den Betrag 1 hat und nur paarweise konjugiert komplexe Faktoren (im ungeraden Fall auch einer vom Wert  $+1$ ) auftreten. Letzteres nach Gl. (10) Anh. I unter Berücksichtigung von Gl. (7). Es ist also  $C = \sqrt{k_1}$  zu setzen und damit

$$w = \sqrt{k_1} \operatorname{sn} [(nu+1) K_1; k_1] \dots \dots \dots (8).$$

Modul  $k_1$  und Periodenkonstante  $K_1$  können auch direkt bestimmt werden. Nach Gl. (8) und (5) ist nämlich:

$$w(0) = \sqrt{k_1} = k^{n/2} \prod_{\nu=1}^n \operatorname{sn} \left[ \frac{2\nu-1}{n} K; k \right]$$

oder:

$$\sqrt{k_1} = k^{n/2} \prod_{\nu=1}^m \operatorname{sn}^2 \left[ \frac{2\nu-1}{n} K; k \right] \dots \dots \dots (9).$$

Die Konstante  $K_1$  ergibt sich aus dem Vergleich der Werte der Ableitung  $\frac{dw}{du}$  an der (Null-) Stelle  $-\frac{1}{n}$  mittels der Formeln (13) und (4) aus Anhang I. Es ist

$$\text{nach Gl. (5)} \quad w' \left( -\frac{1}{n} \right) = K k^{n/2} \prod_{\nu=1}^{n-1} \operatorname{sn} \left[ \frac{2\nu}{n} K; k \right] = K k^{n/2} \prod_{\nu=1}^m \operatorname{sn}^2 \left[ \frac{2\nu}{n} K; k \right],$$

$$\text{nach Gl. (8)} \quad w' \left( -\frac{1}{n} \right) = \sqrt{k_1} n K_1$$

und daher unter Verwendung des Ausdrucks (9)

$$K_1 = \frac{K}{n} \prod_{\nu=1}^m \frac{\operatorname{sn}^2 \left[ \frac{2\nu}{n} K; k \right]}{\operatorname{sn}^2 \left[ \frac{2\nu-1}{n} K; k \right]} \dots \dots \dots (10).$$

Ersetzt man in Gl. (8) dieses Anhangs wieder  $u$  durch  $v-1$ , so folgen die Gl. (6) des Hauptteils. Die Gl. (9) und (10) dieses Anhangs sind die Gl. (7) und (8) des Hauptteils.

### Anhang III

Verhalten der Funktion  $z = \sqrt{k} \operatorname{sn} [vK; k]$

auf der Geraden  $v = i \frac{\kappa}{2} \quad (\kappa = K'/K).$

Nach Gl. (10) und (10a) des Anhangs I ist

$$z = \sqrt{k} \operatorname{sn} \left[ \left( x + i \frac{\kappa}{2} \right) K; k \right] = \cos \vartheta + i \sin \vartheta \dots \dots \dots (1)$$

mit:

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= \cos \vartheta = (1+k) \frac{\operatorname{sn} [xK; k]}{1+k \operatorname{sn}^2 [xK; k]} \\ h(x) &= \sin \vartheta = \frac{\operatorname{cn} [xK; k] \cdot \operatorname{dn} [xK; k]}{1+k \operatorname{sn}^2 [xK; k]} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2).$$

Die Funktionen  $g(x)$  und  $h(x)$  sind elliptische Funktionen mit den Perioden 4 und  $ix$  und mit denselben Perioden, Nullstellen und Polen wie die Funktionen  $\operatorname{sn} [xK_3; k_3]$  bzw.  $\operatorname{cn} [xK_3; k_3]$ , wobei  $k_3$  der zum Periodenverhältnis <sup>14)</sup>

$$x_3 = \frac{K'_3}{K_3} = \frac{1}{2} \frac{K'}{K} = \frac{1}{2} x \dots \dots \dots (3)$$

gehörige Modul und  $K_3$  das zum Modul  $k_3$  gehörige vollständige elliptische Integral ist. Die Funktionen  $g(x)$  und  $\operatorname{sn} [xK_3; k_3]$  einerseits,  $h(x)$  und  $\operatorname{cn} [xK_3; k_3]$  andererseits können sich daher nur um einen konstanten Faktor unterscheiden. Der Faktor sowie Modul  $k_3$  und Periodenkonstante  $K_3$  ergeben sich durch Vergleich der Funktionswerte für  $x=1$ ;  $x=1/2$  und der Werte der Ableitung für  $x=0$  bzw. 1. Das Ergebnis ist:

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= \operatorname{sn} [xK_3; k_3] = \sin \operatorname{am} [xK_3; k_3] \\ h(x) &= \operatorname{cn} [xK_3; k_3] = \cos \operatorname{am} [xK_3; k_3] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

mit

$$k_3 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k} \dots \dots \dots (5)$$

$$K_3 = (1+k) K, \quad K'_3 = \frac{1+k}{2} K' \dots \dots \dots (6).$$

Vergleich der Gl. (2) und (4) liefert

$$\frac{\pi}{2} - \vartheta = \operatorname{am} [xK_3; k_3] \dots \dots \dots (7).$$

Wendet man diese Regel auf Gl. (37) und (38) des Hauptteils an, so erhält man die dortigen Gl. (39) bis (42). Die Wahl der dort angewendeten Substitution bezweckt, daß für  $x=0$  die Werte  $\vartheta_0=0$  und  $\varphi=0$  herauskommen.

<sup>14)</sup> Dies ist die sogenannte „Landen-Transformation“.

## KLEINE MITTEILUNGEN

**Statistische Prüfverteilungen endlicher Spannweite.**

Zur Beurteilung von statistischen Verteilungen  $\varphi(x)$  bei stetigem Merkmal mit annähernd symmetrischem Verlauf benutzt man üblicherweise die Gaußsche Normalverteilung

$$\Phi(x - \alpha, h) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-\alpha)^2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi dx = 1 \quad (1),$$

die man der gegebenen dadurch zuordnet, daß man  $\alpha$  durch den arithmetischen Mittelwert festlegt und das Streuungsmaß  $h$  durch die Forderung bestimmt, daß die Streuungen beider Verteilungen übereinstimmen sollen. Die beiden wahrscheinlichkeitstheoretisch begründeten Bestimmungsgleichungen heißen dann

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) (x - \alpha) dx &= 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) (1 - 2h^2(x - \alpha)^2) dx &= 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi dx = 1 \quad (2). \end{aligned}$$

In Verallgemeinerung dieses Verfahrens erhält man eine bequeme Möglichkeit der Zuordnung einer beliebigen Prüfverteilung an die gegebene dadurch, daß man verlangt, daß ebenso viele Momente beider Verteilungen übereinstimmen sollen, wie Parameter in der Prüfverteilung auftreten. Auf diese Weise werden z. B. die Pearson'schen Verteilungen festgelegt. (R. v. Mises, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung. 1931, S. 269.) Dieses Bindungsprinzip für die beiden Verteilungen ist jedoch nicht das einzig mögliche. Wir wollen hier ein anderes Prinzip verfolgen, das sich an eine bemerkenswerte Umdeutung der Bestimmungsgleichungen (2) anschließt und auf ein Maximumprinzip mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung hinausläuft, das in seiner Geschlossenheit, wenn vielleicht nicht für die Praxis, jedoch für die Theorie interessant erscheint.

Man kann nämlich die Gleichungen (2) als Bestimmungsgleichungen für das folgende Maximumproblem ansehen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \ln \Phi(x - \alpha, h) dx = F(\alpha, h) = \text{Max.} \quad (3).$$

Indem man nun eine solche Auffassung verallgemeinert, kann man einer gegebenen Verteilung eine beliebige Prüfverteilung dadurch zuordnen, daß man ein geeignetes, (3) entsprechendes Prinzip angibt, mit dessen Hilfe die Parameter der Prüfverteilung bestimmt werden können. Man verzichtet dabei zwar auf einen wahrscheinlichkeitstheoretischen Hintergrund, kann aber doch von einer wohldefinierten Anpassung der Prüfverteilung an die gegebene Verteilung sprechen.

Ein brauchbares Prinzip zum Vergleich zweier Verteilungen läßt sich aus der Schwarzschen Ungleichung gewinnen. Schreiben wir nämlich mit normierten Funktionen, die nicht negativ sind

$$\left( \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\varphi(x)} \sqrt{\Psi(x - \alpha, h)} dx \right)^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \cdot$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x - \alpha, h) dx = 1, \quad \sqrt{\varphi} \equiv |\sqrt{\varphi}|,$$

wobei vorausgesetzt wird, daß die hier auftretenden Integrale existieren sollen, so gilt das Gleichheitszeichen nur für  $\Psi \equiv \varphi$ . Für alle anderen Fälle läßt sich die Prüfverteilung  $\Psi(x - \alpha, h)$  in ihren Parametern so wählen, daß

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\varphi(x)} \sqrt{\Psi(x - \alpha, h)} dx &= 1 - \varepsilon^4(\alpha, h) = \text{Max.} \\ \varepsilon^4(\alpha, h) &= \text{Min.} \end{aligned} \right\} \quad (4).$$

$\varepsilon$  ist dabei ein Maß für die Güte der Anpassung.

Ein solches Anpassungsmaß läßt sich für die Prüfung durch eine Gauß-Verteilung nach (3) nicht angeben, da das Maximum nicht eingeschränkt werden kann. Man benutzt stattdessen die  $\chi^2$ -Methode.

Nach dem neuen Prinzip lassen sich natürlich auch die Parameter einer Gauß-Verteilung bestimmen, nach (4) aus der Maximumaufgabe

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\varphi(x)} \sqrt{\frac{h}{\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{h^2}{2}(x-\alpha)^2} dx = \text{Max}(\alpha, h),$$

d. h. aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\varphi(x)} (x - \alpha) e^{-\frac{h^2}{2}(x-\alpha)^2} dx &= 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\varphi(x)} (1 - 2h^2(x - \alpha)^2) e^{-\frac{h^2}{2}(x-\alpha)^2} dx &= 0, \end{aligned}$$

die sich iterativ lösen lassen etwa unter Zuhilfenahme der Werte  $\alpha_0$  und  $h_0$  aus (2). Die Durchführung ist jedoch unbequem. Wählen wir dagegen die folgende Prüfverteilung

$$\left. \begin{aligned} \Psi(x - \alpha, h) &= \frac{15}{16} (1 - h^2(x - \alpha)^2)^2, \\ \alpha - \frac{1}{h} &\leq x \leq \alpha + \frac{1}{h} \end{aligned} \right\} \quad (5),$$

die in den Pearson'schen Typen enthalten ist, hier jedoch anders zugeordnet wird, so ist

$$\int_{\alpha - \frac{1}{h}}^{\alpha + \frac{1}{h}} \sqrt{\varphi} \sqrt{\frac{15h}{16}} (1 - h^2(x - \alpha)^2) dx = 1 - \varepsilon^4$$

zum Maximum zu machen durch Bestimmung der Parameter aus folgenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &+ \frac{1}{h} \\ \int_{\alpha - \frac{1}{h}}^{\alpha + \frac{1}{h}} \sqrt{\varphi(x - \alpha)} dx &= 0, \\ \alpha &- \frac{1}{h} \\ \int_{\alpha - \frac{1}{h}}^{\alpha + \frac{1}{h}} \sqrt{\varphi} (1 - 5h^2(x - \alpha)^2) dx &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6).$$

Wir finden demnach für diese Prüfverteilung ähnlich einfache Bedingungen wie früher in (2), nur daß  $\sqrt{\varphi}$  anstatt  $\varphi$  in den Integralen auftritt.

Für die Rechnung ergeben sich infolge der  $\alpha, h$ -abhängigen Grenzen keine Schwierigkeiten, wenn die Spannweite der Prüfverteilung größer oder gleich der Spannweite der gegebenen Verteilung ist. Man bestimmt also für  $\sqrt{\varphi}$  den Mittelwert  $\alpha_1$  und mit diesem das Streuungsmaß  $h_1$ , ohne Rücksicht auf die Grenzen, für das Gesamtdefinitionsintervall von  $\sqrt{\varphi}$  und hat die Rechnung beendet, wenn die Verteilung  $\varphi$  im Intervall  $< \alpha_1 - \frac{1}{h_1}, \alpha_1 + \frac{1}{h_1} >$  enthalten ist. Andernfalls hat man mit den gefundenen Werten iterativ weiterzurechnen, bis das Verfahren zum Stehen kommt, in der Praxis nach etwa zwei Schritten.

Mit diesen berechneten Werten  $\alpha$  und  $h$  ist die Prüfverteilung festgelegt und der Anpassungsfehler bestimmbar. Es gilt

$$\epsilon^4 = 1 - \int_{\alpha - \frac{1}{h}}^{\alpha + \frac{1}{h}} \sqrt{\varphi} \sqrt{\frac{15}{16} h} (1 - h^2 (x - \alpha)^2) dx$$

und wegen der zweiten Bestimmungsgleichung (6)

$$0 = \sqrt{\frac{15}{16} h} \int_{\alpha - \frac{1}{h}}^{\alpha + \frac{1}{h}} \sqrt{\varphi} \left( \frac{1}{5} - h^2 (x - \alpha)^2 \right) dx$$

ergibt sich

$$\epsilon^4 = 1 - \sqrt{\frac{3}{5} h} \int_{\alpha - \frac{1}{h}}^{\alpha + \frac{1}{h}} \sqrt{\varphi} dx \quad \dots (7).$$

Man hat demnach nur noch das Integral der gegebenen Verteilung  $\sqrt{\varphi}$  im Intervall der Prüfverteilung zu bestimmen und erhält  $\epsilon$  als Gütemaß der Anpassung.

Für folgende Beispiele findet man die Ergebnisse:

$$1. \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \quad \Psi(x - \alpha, h) = \frac{15}{16} \sqrt{\frac{3}{5}} \left( 1 - \frac{3}{5} x^2 \right)^2, \quad \epsilon = 0,44.$$

$$2. \varphi(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} (1 - x^2), & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \quad \Psi(x - \alpha, h) = \frac{15}{16} \sqrt{\frac{4}{5}} \left( 1 - \frac{4}{5} x^2 \right)^2, \quad \epsilon = 0,24.$$

$$3. \varphi(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} (1 - |x|)^2, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \quad \Psi(x - \alpha, h) = \frac{15}{16} \cdot \frac{9}{8} \left( 1 - \frac{81}{64} x^2 \right)^2, \quad \epsilon = 0,28.$$

4. Handelt es sich nicht um stetige Verteilungen, sondern sind die relativen Häufigkeiten in einer Wertetabelle diskreten Merkmalspunkten zugeordnet, so sind die in den vorliegenden Gleichungen auftretenden Integrale durch Summen zu ersetzen, die in der üblichen Weise ausgewertet werden:

$x_i$	$p_i$	$\frac{p_i}{\sum p_i}$	$\sqrt{r_i}$	$\sqrt{r_i} \cdot x_i$	$\frac{x_i}{\sum x_i}$	$\frac{x_i^2}{(\sum x_i^2)}$	$\sqrt{r_i} \cdot (x_i - x_0)^2$
2	2	0,154	0,392	0,784	-2	4	1,568
3	3	0,231	0,480	1,440	-1	1	0,480
4	5	0,385	0,620	2,480	0	0	0
5	2	0,154	0,392	1,960	+1	1	0,392
6	1	0,077	0,277	1,662	+2	4	1,108
13			2,161	8,326	$x_0 = 4$		3,548

$$\alpha = \frac{\sum \sqrt{r_i} x_i}{\sum \sqrt{r_i}}; \quad \frac{1}{5 h^2} = \frac{\sum \sqrt{r_i} (x_i - \alpha)^2}{\sum \sqrt{r_i}} = \frac{\sum \sqrt{r_i} (x_i - x_0)^2}{\sum \sqrt{r_i}} - (x_0 - \alpha)^2;$$

$$\alpha_1 = 3,85; \quad \frac{1}{5 h_1^2} = \frac{3,548}{2,161} - 0,15^2 = 1,62;$$

$$\frac{1}{h_1} = 2,85;$$

$$\Psi(x - \alpha, h) = \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{2,85} \left( 1 - \left( \frac{x - 3,85}{2,85} \right)^2 \right)^2;$$

$$\epsilon^4 = 1 - \sqrt{\frac{3}{5} h} \sum \sqrt{r_i} = 0,0085; \quad \epsilon = 0,30.$$

Es ergibt sich in diesem Falle, wegen  $\alpha_1 - \frac{1}{h_1} = 1,00$ ;  $\alpha_1 + \frac{1}{h_1} = 6,70$ , daß die Spannweite der Prüfverteilung die gegebene ganz enthält, so daß sich eine Iteration erübrigt. Läge dieser Fall nicht vor, so hätte man die herausfallenden Werte in der Tabelle fortzulassen und die Rechnung iterativ zu wiederholen. Wären dabei etwa zwei Verteilungen möglich, so wäre diejenige mit größtem  $h$  auszuwählen.

5. Nach dem vorliegenden Prinzip läßt sich eine Gaußverteilung  $\Phi$  auf eine Verteilung  $\Psi$  mit endlicher Spannweite umrechnen.

Setzen wir

$$\Phi(x - \alpha, h) = \frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 (x - \alpha)^2},$$

$$\Psi(x - \alpha, h) = \frac{15}{16} h (1 - h^2 (x - \alpha)^2)^2,$$

so ergibt sich nach einiger Zwischenrechnung

$$\frac{H}{h} \cong 1,94, \quad \epsilon \cong 0,29,$$

so daß sich die Streuung  $\sigma$  der Gaußverteilung durch  $h$  ausdrücken läßt. Man findet

$$3\sigma = \frac{3}{\sqrt{2} H} \cong \frac{1,09}{h}$$

und erkennt, daß die  $3\sigma$ -Spanne der Gaußverteilung, innerhalb der 99,73% des Kollektivs vorhanden ist, ungefähr zusammenfällt mit der  $1/h$ -Spanne der Verteilung mit endlicher Spannweite, die das gesamte Kollektiv einschließt. Für die Praxis der Anpassung einer Gaußverteilung nach dem üblichen Verfahren bedeutet dieses Ergebnis eine Stützung der Auffassung, daß man die Anteile außerhalb der  $3\sigma$ -Spanne als unwesentlich fortlassen kann.

Wenn auch die Bestimmung der Parameterwerte nach dem genannten Verfahren nicht die gleiche Einfachheit erreicht wie für die Gaußsche Normalverteilung und Bedenken bestehen, das wahrscheinlichkeitstheoretische Prinzip durch ein Anpassungsprinzip zu ersetzen, so ist immerhin ein Vorteil darin zu sehen, daß die zugrunde gelegte Prüfverteilung endliche Spannweite besitzt und das Prinzip gleichzeitig noch ein summarisches Anpassungsmaß liefert. Es ist möglich, durch Aufnahme weiterer Parameter auch Schiefverteilungen mit endlicher Spannweite darzustellen, z. B. in der Form

$$\Psi(x - \alpha, h, k) = \frac{30 h^3 k^3}{(h + k)^5} ((1 + h(x - \alpha))^2 (1 - k(x - \alpha))^2)^2, \\ -\frac{1}{h} \leq x - \alpha \leq \frac{1}{k}.$$

Die Bestimmungsgleichungen für die hier auftretenden Parameter  $\alpha$ ,  $h$  und  $k$  sind naturgemäß verwickelter als für symmetrische Verteilungen.

Hannover.

K. Jaeckel.

### Ergänzung zu dem Aufsatz „Die mathematischen Grundlagen zu einer Meßmethode des Schubmoduls zäher Flüssigkeiten“.

Obiger Aufsatz ist in der „Z. angew. Math. Mech.“ 31 (1951), Seite 83–92, erschienen. Die Beschreibung der Apparatur und des Arbeitens mit ihr findet man in der Arbeit von H. Fromm und W. Hartung „Messung des Schubmoduls zäher Flüssigkeiten“, Die Technik, 7. Jahrgang (1952), Seite 126–130.

In meiner Arbeit sind die natürlichen Koordinaten (Zylinderkoordinaten) näherungsweise durch kartesische Koordinaten ersetzt worden, um die Rechnung zu vereinfachen. Hier sollen nun die durch Anwendung der Zylinderkoordinaten sich ergebenden Verbesserungen der Gleichungen und Endformeln angegeben werden. Der Radius bis zur Innenseite des Spaltes von der Breite  $\delta$  sei  $r_0$ . Die Entfernung eines Punktes im Spalt vom Mittelpunkt der konzentrischen Zylinder sei

$$r = r_0 + x$$

Um Anschluß an die Rechnung der Ausgangsarbeit zu finden, rechnen wir mit  $x$  statt  $r$  als Variablen. Die hier gewählten weiteren Bezeichnungen entsprechen denen der Hauptarbeit. Ebenso erhalten hier die Formeln die gleichen Nummern wie die entsprechenden der Ursprungsarbeit. Doch werden die Formeln dieser Arbeit zur Unterscheidung mit einem Stern versehen.

Die den partiellen Differentialgleichungen (3) bis (5) entsprechenden Gleichungen entwickelt man aus den Formeln (5.3) und (8.2) — hier muß man  $T_e$  gleich Null setzen — meiner im Ing.-Arch. 19 (1951), S. 271, erschienenen Arbeit „Stoffgesetze und Wellen zähelelastischer, isotroper Medien“. Dazu drückt man die Einheitsvektoren im Zylinder-Koordinatensystem durch die Einheitsvektoren im kartesischen Koordinatensystem aus und berechnet die Tensor differentialoperatoren der erstgenannten Einheitsvektoren. Dann entwickelt man die partiellen Diff.-Glen. ähnlich der Entwicklung der Wellengleichung (9.5) der vorher erwähnten Arbeit im Ing.-Arch. Man erhält (Die Korrekturglieder werden in allen folgenden Formeln durch ein Rechteck umschlossen):

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{1}{T} \tau = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v}{r_0 + x} \right) \cdot G \left( 1 + \frac{\sigma}{G} \right) \quad (3^*)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{T} \sigma = - \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v}{r_0 + x} \right) \tau \quad (4^*),$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{2}{r_0 + x} \tau = \varrho \frac{\partial v}{\partial t} \quad (5^*),$$

$$\tau(0, t) = \mu \frac{\partial v(0, t)}{\partial t} \quad (6^*),$$

$$v(\delta, t) = \alpha \alpha \cdot \sin \alpha t \quad (7^*).$$

Das linearisierte Randwertproblem — Vernachlässigung von  $\sigma/G$  neben 1 — lautet dann:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} + \frac{1}{T} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{G}{\varrho} \left( \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{1}{r_0 + x} \frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{4}{(r_0 + x)^2} \tau \right) \quad (8^*),$$

$$\tau(0, t) = \frac{\mu}{\varrho} \left( \frac{\partial \tau}{\partial x}(0, t) + \frac{2}{r_0 + x} \tau(0, t) \right) \quad (9^*),$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x}(\delta, t) + \frac{2}{r_0 + x} \tau(\delta, t) = \varrho \alpha \alpha^2 \cos \alpha t \quad (10^*),$$

Durch den Ansatz

$$\tau = f(x) \cdot \sin \alpha t + g(x) \cdot \cos \alpha t \quad (11^*)$$

erhält man aus (8\*) bis (10\*) das Randwertproblem gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$f''(x) + \frac{1}{r_0 + x} f'(x) + \left( \frac{\varrho \alpha^2}{G} - \frac{4}{(r_0 + x)^2} \right) f(x) + \frac{\alpha \varrho}{G T} g(x) = 0 \quad (12^*),$$

$$g''(x) + \frac{1}{r_0 + x} g'(x) + \left( \frac{\varrho \alpha^2}{G} - \frac{4}{(r_0 + x)^2} \right) g(x) - \frac{\alpha \varrho}{G T} f(x) = 0 \quad (13^*),$$

$$\left. \begin{aligned} \left( 1 - \frac{2\mu}{r_0 \varrho} \right) g(0) &= \frac{\mu}{\varrho} g'(0); \\ \left( 1 - \frac{2\mu}{r_0 \varrho} \right) f(0) &= \frac{\mu}{\varrho} f'(0) \end{aligned} \right\} \quad (14^*),$$

$$\left. \begin{aligned} g'(\delta) + \frac{2}{r_0 + \delta} g(\delta) &= \varrho \alpha \alpha^2; \\ f'(\delta) + \frac{2}{r_0 + \delta} f(\delta) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15^*).$$

Da  $r_0$  stets sehr viel größer als  $x$  ist, läßt sich das Differentialgleichungssystem vereinfachen, indem man für

$$\frac{1}{r_0 + x} = \frac{1}{r_0} \left( 1 - \frac{x}{r_0} \right) \quad \text{und} \quad \frac{1}{(r_0 + x)^2} = \frac{1}{r_0^2} \cdot \left( 1 - 2 \frac{x}{r_0} \right)$$

setzt.

Da das Glied  $x/r_0$  bzw.  $2x/r_0$  neben 1 vernachlässigt werden kann, weil  $x/r_0$  und  $2x/r_0$  in den eingekastelten, d. h. erst durch Einführung der Zylinderkrümmung sich ergebenden, Gliedern vorkommen, kann man die Differentialgleichungen sogar ohne Bedenken in lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten vereinfachen. In der weiteren Rechnung wird also in (12\*) und (13\*)  $x$  neben  $r_0$  vernachlässigt. Die Lösung der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten lautet dann:

$$f(x) = e^{\left( -\frac{1}{2r_0} + s_1 \right) x} (A_1^* \sin vx + A_2^* \cos vx) + e^{\left( -\frac{1}{2r_0} - s_1 \right) x} (A_3^* \sin vx + A_4^* \cos vx) \quad (16^*),$$

$$g(x) = e^{\left( -\frac{1}{2r_0} + s_1 \right) x} (A_2^* \sin vx - A_1^* \cos vx) + e^{\left( -\frac{1}{2r_0} - s_1 \right) x} (-A_4^* \sin vx + A_3^* \cos vx) \quad (17^*),$$

worin

$$s_1 = v_0 \cdot \varphi \quad \text{und} \quad v = \frac{v_0}{\varphi} \quad (18^*)$$

ist mit

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= \sqrt{\frac{\varrho \alpha}{2 G T}} \quad \text{und} \quad \sqrt{1 + d_2^2} - d_2 \\ d_2 &= \vartheta \left( 1 - \frac{G}{4,25 \varrho r_0^2 \alpha^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (19^*)$$

und

$$\vartheta = \alpha T \quad (20^*).$$

Die Konstanten  $A_1^*$  bis  $A_4^*$  ergeben sich aus den Randbedingungen. Man erhält das Gleichungssystem:

$$(A_1^* + A_2^*) + (A_2^* - A_1^*) \varphi^2 = \frac{\mu}{\nu \varrho} \left( 1 - \frac{1,5}{r_0 \varrho} \right) (A_2^* + A_1^*) \quad (21^*),$$

$$(A_2^* - A_1^*) - (A_1^* + A_2^*) \varphi^2 = \frac{\varrho}{\mu \nu} \left( 1 - \frac{1,5}{r_0 \varrho} \right) (A_2^* - A_1^*) \quad (22^*)$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon^2 \epsilon_1 \delta \left\{ \left[ A_1^* \left( \varphi^2 + \frac{1,5}{\nu r_0} \right) - A_2^* \right] \sin \nu \delta \right. \\ \left. + \left[ A_2^* \left( \varphi^2 + \frac{1,5}{\nu r_0} \right) + A_1^* \right] \cos \nu \delta \right\} \\ = \left[ A_2^* \left( \varphi^2 + \frac{1,5}{\nu r_0} \right) + A_4^* \right] \sin \nu \delta \\ \left. + \left[ A_4^* \left( \varphi^2 - \frac{1,5}{\nu r_0} \right) - A_3^* \right] \cos \nu \delta \right\} \quad (23^*). \end{aligned}$$

Die 4. Gl. (24\*), die aus (15\*) sich ergibt, wird hier nicht angegeben, da sie zur Rechnung der „Phasenverschiebung 90°-Methode“ nicht gebraucht wird.

Für die Phasenverschiebung 90° erhält man das Ergebnis

$$\left( \frac{\nu_{0kr} \delta}{\varphi} \right) \left( 1 - \frac{1,5 (z \varrho r_0 \delta - 1,5) \varphi^2}{\nu_{0kr}^2 r_0^2 (1 + \varphi^4)} \right) \operatorname{tg} \left( \frac{\nu_{0kr} \delta}{\varphi} \right) = \varrho \delta^2 z + (\nu_{0kr} \cdot \delta \cdot \varphi) \left( 1 - \frac{1,5 (z \varrho r_0 \delta - 1,5) \varphi^2}{\nu_{0kr}^2 r_0^2 (1 + \varphi^4)} \right) \times \operatorname{Zg} (\nu_{0kr} \cdot \delta \cdot \varphi) \quad (27^*).$$

Unter den in der Hauptarbeit angegebenen Bedingungen werden dann die Gl.n. (28a), (29a) und (30a) zu

$$\left. \begin{aligned} G_0 &= \frac{\alpha_{kr}^2 1 + k + 0,16 k^2 - \dots}{1 - V_0}, \\ G &= \frac{G_0}{1 + \frac{4,25 G_0}{\varrho r_0^2 \alpha^2}} \end{aligned} \right\} \quad (28a^*),$$

$$k = 0,1 \left( \frac{\varrho \alpha_{kr} \delta^2}{\eta} \right)^2 \quad (29a^*),$$

$$z = \frac{1}{\mu \delta} \quad (29b^*),$$

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{\varrho \mu \delta^3 \alpha_{kr}^2}{6 \eta^2} (1 + 0,4 k + 0,07 k^2 + \dots) \\ &\quad - \left( 1,5 \frac{\delta}{r_0} - \frac{2,25}{z \varrho r_0^2} \right) (1 + 0,3 k + \dots) \quad (30a^*). \end{aligned}$$

Kassel 1. E. Pieruschka.

### Ein Näherungsverfahren für die Integration der laminaren, kompressiblen Grenzschichtgleichungen.

Wir haben die kürzlich erschienene Arbeit von W. Diemann [1] mit Interesse gelesen und möchten hier über ein ähnliches von den Verfassern entwickeltes Berechnungsverfahren [2] berichten. Wie es bei dem Pohlhausenverfahren üblich ist, beginnt man mit Integration der  $x$ -Impuls- und Energiegrenzschichtgleichungen in bezug auf die senkrechte Koordinate  $y$ , zwischen den Grenzen  $y = 0$  und  $y = \delta_y$  oder  $\Delta_y$ , wobei  $\delta_y$  und  $\Delta_y$  die entsprechenden Grenzschichtdicken sind. Es ist bekannt (vgl. z. B. [3]), daß die integrierten Gleichungen eine besonders einfache Form annehmen

durch Einsetzen der Dorodnitsynschen Größe  $\eta$ , welche durch die folgende Transformation bestimmt ist,

$$\left. \begin{aligned} d\eta &= \frac{\varrho}{\varrho_{\infty t}} dy, & \eta(\delta_y) &= \delta, \\ \eta(0) &= 0, & \eta(\Delta_y) &= \Delta \end{aligned} \right\} \quad (1).$$

Hierbei bedeutet  $\varrho$  die örtliche Dichte. Der Index  $\infty t$  bezieht sich auf die Staubebedingungen der ungestörten Strömung. Für eine konstante Prandtl'sche Zahl werden die integrierten Gleichungen<sup>1)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dx} + (\delta_1 + \Delta_1 + 2\vartheta) \frac{d}{dx} \log U &= \frac{\tau_0}{\varrho_{\infty t} U^2}, \\ \frac{d\Theta}{dx} + \Theta \frac{d}{dx} \log U &= \frac{q(x)}{\epsilon_p \varrho_{\infty t} T_{\infty t} U} \end{aligned} \right\} \quad (2),$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} \tau_0 &= \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w, \\ q(x) &= - \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w, \\ \vartheta &= \int_0^\delta \frac{u}{U} \left( 1 - \frac{u}{U} \right) d\eta, \\ \delta_1 &= \int_0^\delta \left( 1 - \frac{u}{U} \right) d\eta, \\ \Delta_1 &= \int_0^\Delta \left( \frac{T}{T_\infty} - 1 \right) d\eta, \\ \Theta &= \int_0^\Delta \frac{u}{U} \left( \frac{T_t}{T_{\infty t}} - 1 \right) d\eta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

und  $T_t$  die lokale Stautemperatur sind. Um Gl. (2) zu integrieren, müssen die sechs, in Gl. (3) hervorgehobenen Größen auf zwei reduziert werden. Dies wird beim Pohlhausenverfahren durch passende Darstellung der Grenzschichtprofile erreicht, wobei die betrachteten sechs Größen durch zwei Größen ausgedrückt werden, im wesentlichen  $\delta$  und  $\Delta$ . Es möge in diesem Zusammenhang hervorgehoben werden, daß die Profildarstellungen die Berechnung von Hautreibung und Wärmeübergang nur insofern berühren, als sie die erforderlichen Beziehungen für Reduktion der Variablen liefern.

Die gegenwärtige Theorie nimmt Geschwindigkeits- und Temperaturprofilardarstellungen in der folgenden Form an,

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{U} &= f_0 \left( \frac{\eta}{\delta} \right) + \lambda_1 f_1 \left( \frac{\eta}{\delta} \right) \\ \frac{T - T_\infty}{T_\infty - T_\infty} &= \lambda_{t0} g_0 \left( \frac{\eta}{\Delta} \right) + \lambda_{t1} g_1 \left( \frac{\eta}{\Delta} \right) + \lambda_{t2} g_2 \left( \frac{\eta}{\Delta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4),$$

wobei  $\lambda_1$  dem gewöhnlichen Pohlhausen-Formparameter entspricht und  $\lambda_{t2}$  dem Formparameter  $\Delta_t$  von Diemann analog ist;  $\lambda_{t0}$  bedeutet die bekannte Funktion  $(T_w - T_\infty)/T_\infty$ . Mit Hilfe der Grenzbedingungen an der Wand, welche man von den originalen (nicht integrierten) Differentialgleichungen erhält, kann man alle unbekannten Formparameter als Funktionen der abhängigen Variablen  $\delta$  und  $\Delta$  ausdrücken. Diese, etwas langwierige Einzelrechnung soll hier nicht wiedergegeben werden.

Der nächste Schritt, bevor man Gl. (2) integrieren kann, ersetzt die Größen  $\tau_0$ ,  $\vartheta$ ,  $\delta_1$ ,  $\Delta_1$ ,  $q(x)$  und  $\Theta$  durch die Formparameter und durch das Verhältnis  $\Delta/\delta$ . Damit wird die Zahl der abhängigen Größen auf zwei reduziert. Für die Integration des gegebenen Gleichungssystems ist es relativ gleichgültig, ob die Größen

<sup>1)</sup> Es werden Diemanns Symbole benutzt. In Ausnahmefällen wird das verwendete Symbol ausdrücklich erklärt.

$\delta$  und  $\Delta$  oder irgend ein anderes Paar von Größen als abhängige Variable gewählt werden. Es müssen nur alle unbekannten Größen durch das gewählte Paar ausgedrückt werden können.

Schließlich wird noch ein System von zwei Gleichungen benötigt, um die Anfangswerte der abhängigen Variablen an der Plattenvorderkante zu bestimmen. Die erste Gleichung kann man leicht auf die gewöhnliche Art und Weise erhalten, denn es muß sein  $\lambda_1(0) = 0$  oder  $(d\theta/dx)_{x=0} \neq \infty$ , je nachdem ob  $U(0) \neq 0$  oder  $U(0) = 0$ . Die zweite Gleichung erhält man unter der Annahme, daß  $U\theta^2$  und  $U\Theta^2$  an der Vorderkante verschwinden, was in jedem Falle gültig sein soll. Man erhält dann, unter Anwendung des Taylorschen Theorems, die Identität

$$\left\{ \frac{d}{dx} (U\theta^2) \right\} \Theta^2 - \left[ \frac{d}{dx} (U\Theta^2) \right] \theta^2 \Big|_{x=0} = 0 \quad (5),$$

welche eine zusätzliche Beziehung zwischen den abhängigen Variablen liefert. Für den Grenzfall  $T_w = T_\infty$  und  $M_\infty$  (Machzahl der ungestörten Strömung) = 0, wird Gl. (5) unbestimmt. Aus der Annahme kontinuierlicher Anfangswerte in der Nachbarschaft dieses Singularitätspunktes ergibt sich eine neue Bedingung, die durch die Profildarstellung befriedigt werden muß und die für die gegenwärtige Theorie von Bedeutung ist. Der Bedingung wird dadurch Rechnung getragen, daß wir die Profile  $g_1(\eta/\Delta)$  und  $g_2(\eta/\Delta)$  in der folgenden Form ausdrücken,

$$\left. \begin{aligned} g_n(\eta/\Delta) &= g_{n1}(\eta/\Delta) + \Delta g_{n2}(\eta/\Delta) \\ \Delta &= \left[ \frac{d}{dz} g_n(z) \right]_{z=0} \end{aligned} \right\} \quad (6),$$

wobei  $\Delta$  als Eigenwert von Gl. (5) behandelt wird.

Die Rechnung wurde zunächst für die ebene Platte durchgeführt, unter Annahme der korrekten Zähigkeits-Temperatur-Beziehung von Sutherland. Es wurde jedoch dabei festgestellt, daß die auf diese Weise eingeführten nichtlinearen Glieder zu einer erheblichen Abweichung der Lösung von den korrekten Werten [4] führten. Dies deutet an, daß ein nichtlineares Zähigkeitsgesetz für eine Pohlhausen-Näherungsmethode nicht brauchbar ist. Die genaue Ursache hierfür wurde noch nicht festgestellt. Jedenfalls wird die Schwierigkeit durch Annahme eines linearen Zähigkeitsgesetzes vermieden, was gleichzeitig zu einer erheblichen Vereinfachung des Formalismus führt. Zur Darstellung der Geschwindigkeitsprofile wurden Polynome vierten wie auch sechsten Grades benutzt. Für die Temperaturprofile wurden ausschließlich Polynome sechsten Grades benutzt.

Trotz ziemlich umständlicher Symbolik wird die Integration des allgemeinen Falles der Gl. (2) [welche die Berechnung der Schubspannung  $\tau_0$  und des Wärmestromes  $q(x)$  enthält] ohne besondere Schwierigkeiten durchgeführt und zwar mit Hilfe einer elektronischen Digitalrechenmaschine mit IBM-Kartenprogramm, bei der die allgemeine Verschlüsselung nur einmal am Anfang zu erfolgen braucht. Obwohl im allgemeinsten Fall keine Standardlösung existiert, so zeigt doch ein Vergleich der hier vorgebrachten Theorie mit genauen Lösungen von weniger allgemeinen Fällen, daß die erhaltene Genauigkeit für technische Zwecke hinreichend ist.

Buffalo, New York.

D. N. Morris  
J. W. Smith.

#### Schrifttum

- [1] W. Diemann, Berechnung des Wärmeüberganges an laminar umströmten Körpern mit konstanter und ortsveränderlicher Wandtemperatur. Z. angew. Math. Mech. 33 (1953), S. 89.
- [2] D. N. Morris und J. W. Smith, Skin friction and heat transfer in compressible laminar flow with arbitrary pressure and surface temperature gradients. Bell Aircraft Corporation Rep. No. 02-978-010 (1952).
- [3] L. R. Kalikhman, Gazodinamicheskaya Teoriya Teploperedachi. Prikladnaya Matematika i Mekhanika, Tom X (1946).
- [4] E. B. Van Driest, Investigation of the laminar boundary layer in compressible fluids using the Crocco method. NACA TN 2597 (1952).

## Eine verbesserte Näherungsgleichung für den Ellipsenumfang.

Der Ellipsenumfang  $U_0$  kann für verschiedene Werte  $a$  und  $b$  der großen und kleinen Halbachse mit Hilfe von Zahlentafeln für das elliptische Integral so genau berechnet werden, als die Stellenzahl der verwendeten Tafel gestattet. Wenn im praktischen Gebrauch eine geringere Genauigkeit ausreicht, verwendet man einfache Näherungsgleichungen für den Umfang  $U$ .

Die Hütte<sup>1)</sup> gibt drei verschiedene Näherungsgleichungen an. Sie lauten für den Viertelumfang:

$$\frac{U}{4} = \frac{\pi}{4} \left[ \frac{3}{2} (a+b) - \sqrt{ab} \right] \quad \dots (1),$$

$$\frac{U}{4} = \frac{\pi}{4} \left( \frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \right) \quad \dots (2),$$

$$\frac{U}{4} = 0,9827 a + 0,3110 b + 0,2867 \frac{b^2}{a} \quad (3).$$

Die Abweichungen, die die Ergebnisse jeder Näherungsgleichung von den genauen Werten zeigen, sind für verschiedene Werte des Achsenverhältnisses  $b/a$  verschieden. Die Zahlentafel zeigt die Abweichungen  $\Delta$  der drei oben angeführten Näherungsgleichungen in Prozenten des genauen Wertes in Abhängigkeit vom Achsenverhältnis  $b/a$ .

Wenn man die maximalen Abweichungen der Zahlentafel betrachtet, sieht man, daß die Näherungsgleichungen in derselben Reihenfolge an Genauigkeit zunehmen, in der sie an Einfachheit ihres Aufbaues verlieren.

Im Grenzfall

$$\frac{b}{a} = 1,$$

in dem die Ellipse in einen Kreis vom Radius  $a$  übergeht, wird der Grenzwert

$$\frac{U_0}{4} = \frac{\pi}{2} a$$

von den Gleichungen (1) und (2) genau erfüllt, im Grenzfall

$$\frac{b}{a} = 0,$$

in dem die Ellipse in zwei zusammenfallende Strecken übergeht, wird der Grenzwert

$$\frac{U_0}{4} = a$$

von keiner der drei Gleichungen genau erfüllt.

Es läßt sich nun eine verbesserte Näherungsgleichung angeben, die mindestens die Gleichungen (2) und (3) an Einfachheit übertrifft, aber allen drei Gleichungen an Genauigkeit überlegen ist. Sie lautet:

$$\frac{U}{4} = \frac{\pi ab + (a-b)^2}{a+b} \quad \dots (4).$$

Ihre Abweichungen sind in einer weiteren Spalte der Zahlentafel enthalten. Sie erfüllt die beiden Grenzwerte genau, ihre maximale Abweichung liegt erheblich unter den maximalen Abweichungen der anderen drei Näherungsgleichungen. Sie sollte daher in Zukunft an deren Stelle Verwendung finden.

Da die Abweichungen der neuen Gleichung nur auf der positiven Seite der Null-Linie liegen, kann man die maximale Abweichung noch auf die Hälfte herabsetzen, wenn man die Ergebnisse aus der Gleichung durch Multiplizieren mit dem Faktor 0,997 um soviel verkleinert, daß auf der positiven und negativen Seite etwa gleich große Abweichungen auftreten. Man benutzt dann die korrigierte Gleichung:

$$\frac{U}{4} = 0,997 \frac{\pi ab + (a-b)^2}{a+b} \quad \dots (5),$$

<sup>1)</sup> „Hütte“, d. Ingenieurs Taschenbuch, Bd. I, 26. Aufl. Berlin 1931, S. 119.

Zahlentafel

Achsen- verhältnis $\frac{b}{a}$	Abweichung $\Delta = \frac{U - U_0}{U_0} \cdot 100$ der Näherungsgl. Nr.					
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1	0	0	+0,61	0	-0,30	0
0,7071	+ 0,01	0,00	-0,35	+0,07	-0,23	-0,02
0,5000	+ 0,06	-0,09	-0,10	+0,23	-0,07	-0,05
0,2588	+ 0,66	-0,78	+0,56	+0,55	+0,25	-0,07
0,1736	+ 1,46	-1,50	+0,50	+0,62	+0,33	-0,02
0,0872	+ 3,57	-2,79	-0,07	+0,55	+0,26	+0,05
0,0523	+ 5,45	-3,57	-0,56	+0,43	+0,13	+0,07
0,0175	+ 9,40	-4,58	-1,16	+0,19	-0,25	+0,05
0	+17,81	-5,19	-1,73	0	-0,30	0
Maxim. Abweich.	+17,81	-5,19	-1,73	+0,62	+0,33	$\pm 0,07$

deren Abweichungen in einer weiteren Spalte der Zahlentafel eingetragen sind.

Die Gleichung (4) wurde aus einer Reihenentwicklung für die genaue Berechnung des Ellipsenumfanges hergeleitet, die an der gleichen Stelle der „Hütte“ mitgeteilt wird. Sie lautet:

$$\frac{U}{4} = \frac{\pi}{4} (a+b) \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^2 + \frac{1}{64} \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^4 + \dots \right]$$

und setzt sich mit wachsenden geraden Potenzen von  $\frac{a-b}{a+b}$  unbegrenzt fort.

Bricht man die unendliche Reihe bereits hinter dem zweiten Glied mit der zweiten Potenz ab, so muß man den Koeffizienten  $1/4$  dieses Gliedes durch einen etwas

höheren Zahlenwert ersetzen, um den Wegfall der übrigen Summenglieder auszugleichen. Bestimmt man diesen Koeffizienten aus der Bedingung, daß die Gleichung im Grenzfall

$$\frac{b}{a} = 0$$

den Grenzwert

$$\frac{U_0}{4} = a$$

erfüllt, so nimmt der Koeffizient den Wert

$$\frac{4}{\pi} - 1$$

an. Damit ergibt sich die Gleichung (4).

Man kann natürlich eine noch genauere Näherungsgleichung gewinnen, wenn man die unendliche Reihe in obiger Gleichung erst nach dem dritten Glied abbricht und die beiden Koeffizienten der Potenzglieder so bestimmt, daß die Abweichungen vom genauen Wert möglichst klein werden. Eine solche Gleichung lautet:

$$\frac{U}{4} = \frac{\pi a b [2(a^2 + b^2) + 0,244(a-b)^2] + (a-b)^4}{4(a+b)^3} \quad (6).$$

Ihre Abweichungen sind in der letzten Spalte der Zahlentafel enthalten. Diese Näherungsgleichung ist jedoch bereits so kompliziert geworden, daß sie ihren praktischen Wert einbüßt, während man andererseits ihre maximale Abweichung noch nicht auf  $1/10$  des Wertes der einfachen Gleichung (4) herabdrücken kann. Man wird daher praktisch wohl stets die Gleichung (4) oder (5) verwenden.

Göttingen.

W. Weydanz.

## BUCHBESPRECHUNGEN

**Dr. Alfred Müller, Nomographie für die technische Praxis.** 268 S. m. 97 Abb. Leipzig 1952. Fachbuchverlag. Preis geb. 9,80 DM.

Der erste Teil dieses Buches gibt eine ganz elementare, wenig mathematische Kenntnisse erfordernde, mit großem didaktischen Geschick geschriebene Einführung in die Nomographie. Wertvoll sind vor allem die im zweiten Teil zusammengefaßten Nomogramme aus den Gebieten der Maschinenelemente, der Werkzeugmaschinen, der spanlosen Formung, der Wärmewirtschaft, der Elektrotechnik, der Mechanik und Festigkeitslehre, die von auf diesen Gebieten arbeitenden Ingenieuren beigegeben sind. Das Buch kann sowohl den in der Praxis stehenden Technikern eine Hilfe sein, wie auch einführenden Kursen zugrundegelegt werden.

Dresden.

Willers.

**Jahrbuch 1952 der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt e. V. (WGL).** Herausgegeben von H. Bienk. 148 S. mit zahlreichen Abb. Braunschweig 1953. Friedr. Vieweg & Sohn. Preis geb. 24,— DM.

Die Wissenschaftliche Gesellschaft für Luftfahrt, die 1952 neu gegründet wurde, sieht die vom 21. bis 23. April in Braunschweig von der Technischen Hochschule, dem Bezirksverein des VDI und der Ortsgruppe der Arbeitsgemeinschaft für Luftfahrtforschung abgehaltene Tagung als WGL-Tagung an. In dem vorliegenden Jahrbuch werden nach einleitenden Aufsätzen über die Geschichte der WGL, ihre Satzungen, ihrem Mitgliederbestand usw. die Vorträge der Braunschweiger Tagung wiedergegeben, die in übersichtlicher Zusammenfassung über die Entwicklung der Luftfahrt und der Luftfahrtforschung seit Kriegsende berichten.

Dresden.

Willers.

**Dr.-Ing. W. Meyer zur Capellen, Leitfaden der Nomographie.** IV + 178 S. m. 203 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953. Springer-Verlag. Preis geb. 17,40 DM.

Im ersten Teil des Buches werden die theoretischen Grundlagen besprochen, wobei sich schon hier wichtige Hinweise für die Praxis finden, u. a. werden Genauigkeitsfragen bei verschiedenen Nomogrammen behandelt sowie die projektive Abbildung und Dualität, deren Kenntnis für die Beherrschung der Bereiche unerlässlich ist.

Der zweite Teil, der fast die Hälfte des Buches ausfüllt, enthält Beispiele aus der Praxis, deren Ansatz erläutert wird. Dort, wo dieser auf eine zunächst noch unbefriedigende äußere Nomogrammform führt, weist der Autor auf Verbesserungen der Bereichsdarstellung hin, wobei die projektive Umformung wegen ihrer Schmiegsamkeit bevorzugt wird. Die exakten Zeichnungen verdienen besondere Erwähnung. Der Name des Bahnbrechers der Nomographie in Frankreich, d'Ocagne, ist im Buche leider durchweg mit zwei e geschrieben.

Das Buch, das einige mathematische Kenntnisse voraussetzt, wendet sich zwar in erster Linie an Ingenieure, Mathematiker und Naturwissenschaftler, es wird aber nicht nur diesen, sondern auch allen denen eine wertvolle Hilfe sein, die beruflich mit sich ständig wiederholenden Berechnungen zu tun haben.

Berlin-Tempelhof.

Joh. Fischer.

**W. J. Duncan D. Sc., F. R. S. (Mech. Prof. in the University of Glasgow), The Principles of the Control and Stability of Aircraft.** (Cambridge aeronautical, Series I). XVI + 384 S. Cambridge 1952. University Press. Preis 40 s.

Mit dem vorliegenden Buch wird das Erscheinen einer vom College of Aeronautics in Cranfield ge-

planten Reihe von Spezialwerken auf luftfahrttechnischem Gebiet eingeleitet. Es soll damit dem auf diesem Gebiet bestehenden Mangel an lehrbuchartigen Darstellungen, die die neuesten Erkenntnisse berücksichtigen und dem durch die Entwicklung der Luftfahrt bedingten erweiterten Problembereich Rechnung tragen, abgeholfen werden. Durch die Beschränkung auf Teilgebiete, wie hier auf die besonders wichtigen und komplizierten Fragen der Steuerung und Stabilität von Flugzeugen, ist die Möglichkeit gegeben, diese in erschöpfender Weise als sonst in den Aerodynamiklehrbüchern üblich zu behandeln und zugleich die Bearbeitung einem Fachmann auf dem speziellen Gebiet zu übertragen (im vorliegenden Buch sind darüber hinaus noch zwei Kapitel von Prof. A. D. Young übernommen worden).

Die im Hinblick auf die Fülle des Stoffs auch hier erforderliche Auswahl wurde so getroffen, daß der Leser mit allen wichtigen Problemen eingehend vertraut gemacht wird. Dazu gehört neben den allgemeinen Stabilitäts- und Steuerungsproblemen eine Untersuchung der zahlreichen speziellen Flügel-Ruder-Konstruktionen, der Einfluß der elastischen Verformungen des Tragwerks sowie der Kompressibilität der Luft. Der Verf. hat mathematisch schwierigere theoretische Ableitungen im allgemeinen vermieden, indem er nur die entsprechenden Ergebnisse anführt oder aber den Fragekomplex in großen Zügen behandelt. Gleichzeitig wird auch auf eine übermäßige Aufzählung experimenteller Daten trotz deren Bedeutung für das vorliegende Gebiet verzichtet, sondern vielmehr versucht, diese in den Rahmen einer möglichst elementaren Theorie einzubauen.

Die Absicht des Verf., dem angehenden Flugzeug-aerodynamiker ein entsprechendes Lehrbuch in die Hand zu geben, kann als voll gelungen bezeichnet werden. Zugleich ist dieses Buch aber auch allgemein für den Aerodynamiker zur Orientierung über die modernen Probleme auf diesem Gebiet von Nutzen.

Dresden.

K. Krienes.

**H. Drescher**, Untersuchungen an einem symmetrischen Tragflügel mit spaltlos angeschlossenen Ruder bei raschen Änderungen des Ruderausfalls (ebene Strömung). (Mitteilungen aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung. Nr. 6.) I + 71 S. mit 45 Abb. u. 2 Tab. Göttingen 1952. Selbstverlag Max-Planck-Institut für Strömungsforschung. Preis brosch. 9,— DM.

Von den umfangreichen Arbeiten aus dem Krieg ruht immer noch ein sehr großer Teil, der Allgemeinheit entzogen und vergraben. Da ist es besonders zu begrüßen, daß die Mitteilungen des Max-Planck-Instituts für Strömungsforschung sich auch in den Dienst der Hebung solcher Schätze gestellt haben. Die vorliegende Mitteilung bringt reiches experimentelles Material zu den Strömungserscheinungen am Tragflügel beim Übergang in einen anderen stationären Zustand. Wenn die veröffentlichten Ergebnisse (24 Versuche) auch nur einen kleinen Teil des ganzen Materials (250 Versuche) darstellen, so geben sie doch einen guten Überblick über die Erscheinungen durch Druckmessungen an 21 Meßbohrungen und Photographien von Farbspuren, auch mit Filmkamera und Zeitlupe. Die Hauptergebnisse der mit Wasser durchgeführten Versuche sind folgende: 1. Gruppe mit Anstellw.  $\alpha = -5^\circ$ , Ruderwinkel  $\beta = 0^\circ \rightarrow 15^\circ$ , liefert durchweg anliegende Strömung; 2. Gruppe mit  $\alpha = 0^\circ$  und  $-5^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ \rightarrow 60^\circ$  am Ruder abreißend; 3. Gruppe  $\alpha = -15^\circ$  bis  $+12,5^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ \rightarrow 60^\circ$  an Ruder und Hauptflügel abreißend. Bei anliegender Strömung (kleine Winkel) zeigte sich gute Übereinstimmung mit der instationären Theorie für die geknickte ebene Platte.

Weilburg.

L. Schiller.

**Francesco Giacomo Tricomi**, Equazioni differenziali. 2. erweiterte Aufl. 353 S. m. 26 Abb. Torino 1953. Edizioni Scientifiche Einaudi. Preis geb. 4000 L.

Der Autor stellt sich die Aufgabe, einige Gebiete aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, die in den üblichen Anfängervorlesungen gewöhnlich zu kurz kommen, mit der wünschenswerten Ausführlichkeit zu behandeln, wobei bis zu neueren Forschungsergebnissen, an denen der Verf. maßgebend beteiligt ist, vorgestoßen wird. Unter bewußtem Verzicht auf elementare Dinge („integrable Typen“ usw.), die in allen guten Lehrbüchern der höheren Analysis nachgelesen werden können, beginnt das Buch in seinen ersten (einleitenden) Kapiteln mit dem fundamentalen Existenzbeweis von Picard-Lindelöf für Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung. Das zweite Kapitel befaßt sich mit geometrischen Eigenschaften der Lösungskurven, vor allem mit dem Verhalten in der Nachbarschaft von singulären Punkten und mit periodischen Lösungen. Im dritten und vierten Kapitel behandelt der Verf. die linearen Differentialgleichungen, wobei er sich aus Raumgründen im allgemeinen auf diejenigen zweiter Ordnung beschränkt. Es finden sich dort insbesondere das Oszillationstheorem (unter Benutzung der auf H. Prüfer zurückgehenden Variablentransformation), die Eigenwerttheorie, die Greensche Funktion und die Zusammenhänge mit linearen Integralgleichungen, Betrachtungen über das asymptotische Verhalten der Lösungen für  $x \rightarrow \infty$  (z. B. Stabilitätsprobleme) und asymptotische Formeln für Eigenwerte und Eigenfunktionen für große Werte des Parameters nebst Anwendungen auf Laguerresche und Legendresche Polynome. Nach diesen, der reellen Theorie gewidmeten Abschnitten befaßt sich das fünfte und letzte Kapitel mit Untersuchungen im Komplexen. Neben dem fundamentalen Existenzsatz gelingt hier durch Verwendung funktionentheoretischer Hilfsmittel eine abgerundete Betrachtung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Fuchs'schen Klasse, aber auch das Studium wesentlich singulärer Stellen nebst Anwendungen auf die konfluenten hypergeometrischen Funktionen und die Zylinderfunktionen.

Das Buch wird jedem Leser, der über die Elemente der höheren Analysis und (für Kapitel V) der Funktionentheorie verfügt, einen tiefgehenden und durch seine klare und didaktisch geschickte Darstellung gut verständlichen Einblick in die genannten Gebiete gewähren.

Dresden.

Maruhn.

**A. Timpe** (em. o. Prof. a. d. TU Berlin), Einführung in die Finanz- und Wirtschaftsmathematik. 2. verb. Aufl. VI + 217 S. m. 70 Abb. Wiesbaden 1953. Verlag für angewandte Wissenschaften. Preis geb. 17,80 DM.

Die 1934 erschienene erste Auflage des vorliegenden Buches wurde in dieser Zeitschrift Bd. 15 (1935), S. 181 von v. Mises eingehend besprochen. Es war längere Jahre vergriffen und erscheint jetzt in einer nicht wesentlich veränderten Form. In ihm wird ein umfangreicherer Stoff behandelt, als man ihn üblicherweise in derartigen Büchern findet. Dieser wird in acht Abschnitten dargeboten, die die Überschriften tragen: 1. Einfacher Geldverkehr, Wertpapiere, 2. Zinseszins- und Rentenrechnung, Versicherungsrechnung, 3. Tilgungs- und Abschreibungswesen, 4. Kurs- und Rentabilität von Tilgungsanleihen, 5. Tarifmathematik, 6. Erfolgsrechnung, 7. Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik in Anwendung auf Wirtschaftsprobleme, 8. Die Analyse von Zeitreihen. Neubearbeitet ist der Paragraph über Rentenrechnung. Auch sonst sind Änderungen und Ergänzungen hinzugefügt. Gern gesehen hätte man, daß die erst in den letzten Jahren in Deutschland be-

kanntgewordenen, hierher gehörenden Arbeiten über die Anwendung der Methoden der mathematischen Statistik berücksichtigt wären. Aber auch in der vorliegenden Form wird das klar geschriebene Buch, das an Mathematikerkenntnissen nur die durch eine gute Schule vermittelten voraussetzt, vielen eine sehr brauchbare Einführung in die behandelten Gebiete sein.

Dresden.

Willers.

**I. G. Petrovskij**, Vorlesungen über die Theorie der Integralgleichungen. Übersetzt von R. Herschel. 100 S. Würzburg 1953. Physica-Verlag. Preis 7.80 DM.

Die vorliegende Einführung in die Theorie der linearen Integralgleichungen zweiter Art entspricht etwa dem, was in einer Vorlesung für Anfänger auf diesem Gebiete gebracht zu werden pflegt. Das erste Kapitel befaßt sich mit den Fredholm'schen Sätzen, soweit sie determinantenfrei bewiesen werden können. Es werden also ausgeartete Kerne, die Neumann'sche Reihe, die fastausgearteten Kerne und die (durch ausgeartete Kerne gleichmäßig approximierten) gleichmäßig stetigen Kerne behandelt. Ausführlich wird auf diejenigen nichtbeschränkten Kerne eingegangen, auf die sich die Fredholm'schen Sätze übertragen lassen. Nach einem kurzen zweiten Kapitel über Volterra'sche Integralgleichungen ist das dritte Kapitel den Gleichungen mit reellem symmetrischen Kern gewidmet. Es bringt eine für den Anfänger recht anschauliche Einführung des Funktionenraumes, die wichtigsten Sätze über Eigenwerte und Eigenfunktionen (insbesondere die Existenz eines Eigenwertes nach Gelfand) und die verschiedenen Entwicklungssätze. Allen diesen Betrachtungen liegt wie üblich der Riemann'sche Integralbegriff zu Grunde. Ein Ausblick auf Kerne, die im Lebesgueschen Sinne quadratisch integrierbar sind, bildet den Abschluß des Buches.

Das Buch ist klar und mit didaktischem Geschick abgefaßt. Obwohl es nicht wesentlich aus der Reihe der vielen Bücher mit gleichem Thema tritt, ist es doch jedem, der sich in diese Materie einarbeiten will, durchaus zu empfehlen.

Dresden.

Maruhn.

**Dr. Günther Pickert**, Analytische Geometrie. (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A, Bd. 24.) X + 398 S. mit 76 Abb. Leipzig 1953. Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig KG. Preis 26.— DM.

Verfasser stellt sich die Aufgabe, die Analytische Geometrie von Grund auf, ausgehend von einem Axiomensystem aufzubauen, das mit den Grundbegriffen „Punkt“ und „Vektor“ arbeitet und die reellen Zahlen verwendet. Er berücksichtigt, daß man für viele Herleitungen statt aller für die reellen Zahlen gültigen Gesetze nur die Eigenschaften eines Schiefkörpers benötigt (in dem das kommutative Gesetz der Multiplikation nicht gilt). Ganz allgemein legt Verfasser besonderen Wert darauf, den Studierenden von vornherein an die Begriffsbildungen und Gedankengänge der modernen Mathematik heranzuführen, und verzichtet dafür lieber auf eine gewisse Breite des geometrischen Stoffes. Rund 270 Aufgaben dienen zur Einübung des Vorgetragenen und zu dessen Ergänzung. Ein Literaturverzeichnis enthält Bücher und Abhandlungen, die den Leser über das in dem Werk Gebotene hinausführen können.

Das Buch enthält drei Hauptteile: I. Affine Geometrie. Ein  $n$ -dimensionaler reeller affiner Raum  $A^{(n)}$  wird als eine Menge von zwei Arten von Dingen erklärt, die als Punkte und Vektoren bezeichnet werden und für welche eine Reihe von Axiomen gelten. Nach Definition der Begriffe „Vektorschar“

und „linearer Unterraum“ wird die lineare Algebra des affinen Vektorraumes abgeleitet, wobei von Matrizen und Determinanten Gebrauch gemacht wird.

II. Metrische Geometrie. Es werden zwei neue Grundbegriffe, die „Länge eines Vektors“ und das „Senkrechtsein von Vektoren“ und einige neue Axiome eingeführt. Ein  $A^{(n)}$  mit  $n \geq 2$ , in welchem die zusätzlichen Axiome gelten, ist ein  $n$ -dimensionaler metrischer Raum  $M^{(n)}$ . In diesem wird eine symmetrische Fundamentalform zweiten Grades eingeführt. Die weitere Entwicklung der metrischen Geometrie geht über die Begriffe Pythagoräischer Raum, Winkel zweier Vektoren, archimedische Anordnung, Bewegung, Inhalt und orientierter Inhalt eines Simplex zu den Hyperflächen zweiter Ordnung.

III. Projektive Geometrie. Der  $n$ -dimensionale projektive Raum  $\Pi^{(n)}$  wird aus einem affinen  $n$ -dimensionalen Raum durch Hinzunahme der uneigentlichen linearen Unterräume gewonnen. Als Kollineationen zweier projektiven Räume werden die eindeutigen Punktabbildungen definiert, bei welchen drei Punkte einer Geraden stets wieder drei Punkten einer Geraden entsprechen. Projektiv heißt eine Kollineation, wenn sie die Doppelverhältnisse invariant läßt. Die Projektionen führen zu ausgearteten Kollineationen. Über Dualitäten, insbesondere Polaritäten und Nullsysteme im  $\Pi^{(n)}$  gelangt man zu den Quadriken. Die affine Geometrie und die Metrik werden projektiv erklärt. Durch Auszeichnung einer  $(n-1)$ -dimensionalen Hyperfläche zweiter Ordnung wird die nichteuklidische Geometrie und die zugehörige Metrik eingeführt. Die projektive Liniengeometrie des  $\Pi^{(3)}$  wird mit Hilfe einer Abbildung der Geraden des  $\Pi^{(3)}$  auf Punkte einer besonderen Quadrik des  $\Pi^{(5)}$  behandelt. — Ein Anhang bringt als Ergänzung zum systematischen Aufbau der analytischen Geometrie die Einführung der trigonometrischen Funktionen ohne Benützung des Winkelbegriffs, die Kennzeichnung der projektiven Ebene ohne Verwendung von Vektoren und Skalaren und die Automorphismen des Körpers der reellen Zahlen.

Das Werk ist insbesondere solchen Studierenden zu empfehlen, die nicht nur die praktischen Methoden der analytischen Geometrie kennenlernen wollen, nach welchen konkrete geometrische Aufgaben mit Hilfe von Rechnungen gelöst werden können, sondern denen es vor allem darum zu tun ist, die Grundlagen der analytischen Geometrie, ihren begrifflichen Aufbau und die tieferen Zusammenhänge zwischen ihren großen Zweigen, die durch die Gedankengänge der modernen Mathematik vermittelt werden, kennenzulernen.

Freiberg (Sa.).

W. Schmid.

**Dr. P. Funk** (o. Prof. a. d. T. H. Wien), **Dr. Hans Sagan** und **Franz Selig**, Die Laplace-Transformation und ihre Anwendungen. VII + 106 S. m. 18 Abb. Wien 1953. Verlag Franz Deuticke. Preis kart. 10.— DM.

Die Laplace-Transformation wird heute schon vielfach, insbesondere bei Behandlung von Einschaltvorgängen verwendet. Auf der Hochschule ist jedoch meist keine Zeit, darauf in den mathematischen Vorlesungen einzugehen. Da will das vorliegende Bändchen einspringen, dem Vorlesungen des ersten Verfassers zu Grunde liegen. Es ist in der Hauptsache für Physiker und Ingenieure bestimmt und verzichtet daher auf mathematische Einzelheiten, wie etwa auf die genaue Diskussion der Gültigkeitsbereiche der Operationen und Korrespondenzen, verweist vielmehr da auf entsprechende Lehrbücher. Nur das Heaviside'sche Theorem über asymptotische Entwicklung wird, wenn auch skizzenhaft, doch ausführlicher dargestellt, um zu zeigen, daß dieser die rein mathematischen Schwierigkeiten doch beträchtlich unterschätzt hat. Um eine Übersicht über Inhalt und Umfang des Bändchens zu geben, seien hier die Überschriften der einzel-

nen Abschnitte angeführt: Lineare Funktionaltransformationen, Erklärung und Eigenschaft der Laplace-Transformation. Die Abbildung der fundamentalen Funktionen. Der Heavisidsche Entwicklungssatz. Systeme von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Faltung im Objektraum, der Transformator. Die Abelsche Integralgleichung. Anwendung der Laplace-Transformation auf die Wärmeleitungsgleichung. Thomson-Kabel. Das Fouriersche Integraltheorem. Die allgemeine Umkehrformel. Asymptotische Entwicklungen. Übergangsfunktion und Frequenzgang. Regelvorgänge. Eine kurze historische Übersicht bildet den Abschluß.

Das Bändchen setzt nur die von der Hochschule vermittelten mathematischen Kenntnisse voraus und ist durchaus verständlich geschrieben. Es sei daher nicht nur den Studierenden, sondern auch den in der Praxis stehenden Elektroingenieuren und Physikern, die sich mit Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation vertraut machen wollen, angelegentlichst empfohlen.

Dresden.

Willers.

**Prof. Dr. Friedrich Böhm**, *Versicherungsmathematik II*. (Sammlung Götschen 917/917a.) Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. 205 S. Berlin 1953. W. de Gruyter & Co. Preis 4.80 DM.

Der vorliegende Band II des Werkes ergänzt die im Band I, 180 der Sammlung, dargestellte elementare Versicherungsrechnung nach verschiedenen Seiten hin und zerfällt in die beiden Teile Lebensversicherungsmathematik und Einführung in die technischen Grundlagen der Sozialversicherung. Der erste Teil gliedert sich in die 8 Kapitel: Verzinsung und Zeitrente, Sterblichkeit und Lebenserwartung, Erlebensfallversicherung und Leibrente, Todesfallversicherung, Versicherungen mit veränderlichem Betrage, Berechnung der Beiträge und Deckungsrücklagen, Beitragsrückgewähr, Versicherung verbundener Leben und bringt die analytische Theorie des Zinses und der Lebensversicherung sowie die Behandlung verwickelter Versicherungsformen. In den 3 Kapiteln des zweiten Teils werden die technischen Grundlagen der Invaliditäts-Versicherungsrechnung, die Berechnung der Barwerte und Anwartschaften sowie die Beitragsberechnung in der Sozialversicherung dargelegt.

Die leichtverständliche Darstellungsweise, ein angemessener Stoff statistischer und technischer Tafeln und viele geschickt gewählten Zahlenbeispiele machen das Buch zum Selbststudium und zum praktischen Gebrauche sehr geeignet; ein reichhaltiges Literaturverzeichnis weist dem Leser den Weg zu tieferem Eindringen in die Versicherungsmathematik. Das Buch kann daher warm empfohlen werden.

Dresden.

P. E. Böhm er.

**Kurt Reidemeister** (o. Prof. a. d. Univ. Marburg). *Topologie der Polyeder und kombinatorische Topologie der Komplexe*. (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik. Reihe A, Bd. 17.) 2. Aufl. XI + 196 S. m. 69 Abb. Leipzig 1953. Akademische Verlagsgesellschaft. Geest u. Portig KG. Preis geb. 14.— DM.

Die vorliegende neue Auflage enthält gegenüber der ersten Auflage keine wesentlichen Änderungen. Als Polyeder bezeichnet der Verfasser jede Punktmenge eines linearen  $n$ -dimensionalen Raumes, die sich durch Durchschnittbildung und Summenbildung aus endlich vielen Halbräumen und linearen Unterräumen erzeugen läßt. Durch diese Definition ist der elementare Charakter der hier entwickelten Theorie gekennzeichnet, die nur Inzidenzaxiome und Ordnungsaxiome der linearen Geometrie, aber keine Stetigkeitsaxiome, benutzt. In Kap. I werden die randtreuen Zerlegungen eines Polyeders (in konvexe Raumstücke) betrachtet. Invarianten eines Polyeders im Sinne der

kombinatorischen Topologie sind dann diejenigen Eigenschaften, die allen randtreuen Zerlegungen des Polyeders gemeinsam sind. In Kap. II wird u. a. der Jordansche Satz auf  $(n-1)$ -dimensionale Polyeder im  $n$ -dimensionalen Raum übertragen. Eine Polyederaddition und ein Verbindungsprodukt von Polyedern wird erklärt. Die endlichen Polyeder bilden mit diesen beiden Verknüpfungen einen Ring, dessen Struktur sich genau übersehen läßt. In Kap. III sind u. a. auch die Beziehungen zwischen Stetigkeitstopologie und kombinatorischer Topologie beschrieben. Es folgen Sätze über isolierte Transformationen. Kap. IV behandelt topologische Eigenschaften der Polyeder.

Dresden.

M. Landsberg.

**S. C. Dampier**, *Kurze Geschichte der Wissenschaften in ihrer Beziehung zu Philosophie und Religion*. XI + 288 S. m. 14 Abb. u. 9 Tafeln. Zürich 1946. Rascher-Verlag. Preis 15.— DM.

Verf. faßte seine umfangreiche Geschichte der Wissenschaften in einen kürzeren Band zusammen, der 1943 erschien. Das vorliegende Buch ist eine Übersetzung dieses Bandes. Es wird darin die Entwicklung der Physik, Chemie, Biologie, Medizin, Psychologie und Geographie von ihren ersten Anfängen an in ihrer Beziehung zu Religion und Philosophie, die besonders in den früheren Zeiten von Bedeutung ist, dargestellt. Der geringe Umfang des Buches bedingt an manchen Stellen eine etwas skizzenhafte Darstellung. Die Entwicklung der letzten zehn Jahre fehlt natürlich.

Die Übersetzung des ausgezeichneten Buches bedürfte hier und da einer leichten Überarbeitung. Dabei sollte etwa in Anmerkungen noch mehr auf den Beitrag Deutschlands zu dieser Entwicklung eingegangen werden, da manche deutsche Forscher, deren Werk etwas ausführlicher berücksichtigt werden sollte, nur kurz erwähnt oder überhaupt nicht genannt werden. Konstanten sollten in dem auf dem Kontinent üblichen Maßsystem angegeben werden.

Dresden.

Willers.

**Prof. Dr.-Ing. habil. Ulrich Graf und Dr. phil. Hans-Joachim Henning**. *Formeln und Tabellen der Mathematischen Statistik*. VI + 102 S. m. 9 Abb. und 12 Kurvenblättern. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953. Springer-Verlag. Preis brosch. 9.— DM.

Der Benutzer einer mathematischen Formelsammlung üblicher Art hat sich die hierfür nötigen Grundlagen während seiner Ausbildung erworben. Die Mehrzahl der Ingenieure, die mit vorliegender statistischen Formelsammlung arbeiten, wird sich nicht in dieser Lage befinden. Darin liegt natürlich eine gewisse Gefahr, denn nichts ist für die Verbreitung statistischer Methoden schädlicher als folgenschwere Fehlschlüsse auf Grund von unsachgemäßer Anwendung. Für diejenigen jedoch, die sich die für ihre Arbeit nötigen statistischen Grundkenntnisse im Selbststudium erworben haben, ist das vorliegende Bändchen sehr zu begrüßen. Es enthält in übersichtlicher Anordnung alles Wesentliche, was der Praktiker für die tägliche Arbeit braucht.

Auf den ersten 30 Seiten findet man eine Formelsammlung, die in ihrem Umfang etwa dem entspricht, was in dem Buch „Statistische Methoden bei textilen Untersuchungen“ der gleichen Verfasser gebracht wird. Auch die Tabellen und Kurvenblätter sind dem erwähnten Werk entnommen (Normalverteilung, Integralgrenzen der  $t$ -,  $F$ - und  $\chi^2$ -Verteilung zu 95%, 99% und 99,9% Sicherheit, Hilfstafeln für Kontrollkarten, Existenzprüfung von Korrelationskoeffizienten usw.) und wurden noch um zwei Tafeln für  $\lg N!$  (bis  $N = 999$ ) und für  $n^2$  und  $\sqrt{n}$  (bis

$n = 2000$ ) ergänzt. Bei Kurvenblatt  $H$  fehlt leider eine Genauigkeitsangabe. Von den 20 Beispielen, die den Gebrauch der Formeln und Tabellen erläutern sollen, sei besonders auf Beispiel 17 (Prüfung von Ereignishäufigkeiten im Binomialpapier nach Mosteller-Tukey) hingewiesen; dieses graphische Verfahren, das für beliebige Stichprobenumfänge verwendbar ist, verdient wegen seiner Bequemlichkeit in der Handhabung große Beachtung. Dem Charakter einer Formelsammlung entsprechend, wird auf theoretische Ausführungen völlig verzichtet. Dafür

sind im Literaturverzeichnis knapp 40 Bücher von sehr unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad aufgeführt.

Weil das Bändchen im Gegensatz zu den meisten deutschsprachigen statistischen Büchern nicht nur für ein begrenztes Anwendungsgebiet geschrieben ist, ist es geeignet, der weitesten Verbreitung statistischer Methoden zu dienen, und es wird dieser Aufgabe durch geschickte Stoffauswahl und Übersichtlichkeit in besonderem Maße gerecht.

Dresden.

G. Opitz.

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen.

## EINGEGANGENE BÜCHER

Bei der Schriftleitung sind folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten).

**Richard von Mises** (Prof. a. d. Harvard Universität Cambridge (Mass.)) und **Theodore von Kármán** (Prof. a. d. Columbia Universität, New York). *Advances in applied Mechanics*. Bd. III. X + 324 S. m. zahlr. Figuren. New York 1953. Academics Press Inc. Preis geb. 9.— \$.

**Ph. Furtwängler**, *Allgemeine Theorie der algebraischen Zahlen*. Überarbeitet von H. Haase — W. Jehne, Hamburg. (Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen Bd I 2, Heft 8, Teil II, 19.) 50 S. Leipzig 1953. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis geb. 6,— DM.

**Dr.-Ing. A. Nasvytis**. *Die Gesetzmäßigkeiten kombinatorischer Technik*. (Wissenschaftliche Normung. Schriftenreihe, herausgegeben in Verbindung mit dem Seminar für Technische Normung an der Technischen Hochschule Hannover. Heft 3.) VIII + 103 S. m. 29 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953. Springer-Verlag. Preis geh. 9.— DM.

**Dr. Bernhard Sticker** (Prof. a. d. Univ. Bonn). *Fünfstellige Tafel der Trigonometrischen Funktionen*. Ausg. A für Altgradteilung. 52 S. m. 1 Interpolationstafel. Bonn 1954. Ferd. Dümmlers Verlag. Preis geb. 7,60 DM.

**Dr.-Ing. W. Grossmann** (Prof. a. d. T. H. Hannover). *Grundzüge der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate nebst Anwendungen in der Geodäsie*. VIII + 261 S. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953. Springer-Verlag. Preis geb. 19,80 DM.

**Uno Olsson**, *Non-Circular Cylindrical Gears*. XI + 216 S. Stockholm 1953. Acta Polytechnica. Mechanical Engineering Series Vol. 2 Nr. 10. Preis 18,— Sw. Kr.

*Colloque sur les fonctions de plusieurs variables*. Tenu à Bruxelles du 11. au 14. mars 1953. 159 S. Liège-Paris 1953. Verlag Georges Thone, Masson et Cie. Preis geh. 250 francs belges. 1800 francs français.

**H. Prüfer**, *Projektive Geometrie*. Aus dem Nachlaß herausgegeben von G. Fleddermann und G. Köthe. 2. unveränd. Aufl. VII + 314 S. m. 254 Abb. Leipzig 1953. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K. G. Preis geb. 9,— DM.

**Dr.-Ing. R. Zurmühl**, *Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker*. XI + 481 S. m. 114 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg. Springer-Verlag 1953. Preis geb. 28,50 DM.

**Dr. phil. habil. Rudolf Beyer**, *Kinematische Getriebesynthese*. Grundlagen einer quantitativen Getriebelehre ebener Getriebe. Für den Konstrukteur, für die Vorlesung und das Selbststudium. VII + 217 S. m. 258 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953. Springer-Verlag. Preis geb. 36,— DM.

**Dr. Fritz Stüssi** (o. Prof. an der E. T. H. Zürich), *Vorlesungen über Baustatik*. Band I: Statisch bestimmte Systeme — Spannungsberechnung — Elastische Formänderungen — Stabilitätsprobleme — Seile. 2. Aufl. 370 S. m. 336 Abb. Basel/Stuttgart 1953. Verlag Birkhäuser. Preis geb. 40,05 Sfrs., brosch. 35,90 Sfrs.

**L. Howarth, H. B. Squire and C. N. H. Lock**, *Modern Developments in Fluid Dynamics. High Speed Flow*. (The Oxford Engineering Science Series.) 2 Bände. XVI + VIII + 875 S. m. 288 Abb. u. 26 Tafeln. Oxford 1953. Clarendon Press. Preis geb. 84.— s.

**Dr. H. Blasius** (Oberstudienrat i. R. der Ingenieurschule Hamburg), *Höhere Mathematik. Mathematische Grundlagen vom technischen Standpunkt*. 294 S. m. 168 Fig. und 78 Aufgaben. Hamburg 1954. Boysen & Maasch Verlag. Preis kart. 8,— DM, geb. 10,— DM.

**Dr. E. Trost** (Prof. am Technikum Winterthur). *Primzahlen*. (Elemente der Mathematik vom höheren Standpunkt aus, Bd. II.) 95 S. Basel/Stuttgart 1953. Verlag Birkhäuser. Preis brosch. 13,50 Sfr.

**A. Blanc-Lapierre** (Prof. à la Faculté des Sciences d'Alger) und **R. Fortet** (Prof. à la Faculté des Sciences de Paris), *Théorie des fonctions aléatoires. Applications à divers phénomènes de fluctuation*. (Collection d'ouvrages de mathématique à l'usage des physiciens publiée sous la direction de G. Darmonis.) XVI + 693 S. m. zahlr. Abb. Paris 1953. Masson & Cie. Preis brosch. 6000 frs., geb. 6500 frs.

**N. I. Muskhelishvili**, *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. 3. verb. und vermehrte Auflage. (Aus dem Russischen übersetzt von J. R. M. Radok.) XXXI + 704 S. m. 66 Abb. Groningen (Holl.) 1953. Verlag P. Noordhoff Ltd. Preis geb. 38,— fl.

**N. I. Muskhelishvili** (Math. Institut Tiflis), *Singular integral equations*. 2. Aufl. (Aus dem Russischen übersetzt von J. R. M. Radok.) 447 S. m. 16 Abb. Groningen (Holl.) 1953. Verlag P. Noordhoff. N. V. Preis geb. 28,50 fl.

**Dr.-Ing. Rudolf Richter** (Em. Prof. a. d. T. H. Karlsruhe) mit Beiträgen von **Dr.-Ing. Robert Brüderlink** (o. Prof. a. d. T. H. Aachen). Elektrische Maschinen. Band 2: Synchronmaschinen und Einankerumformer. Zweite, verb. Aufl. XXVIII + 707 S. m. 519 Abb. Basel/Stuttgart 1953. Verlag Birkhäuser. Preis geb. 46.80 fr.

**Winfried Oppelt**, Kleines Handbuch Technischer Regelvorgänge. 448 S. m. 353 Abb. u. 110 Tafeln. Weinheim/Bergstr. 1954. Verlag Chemie GmbH. Preis geb. 31,80 DM.

**Review of Input and Output Equipment Used in Computing Systems** (Joint AIEE-IRE-ACM Computer Conference). 142 S. m. zahlr. Abb. New York 1953. American Institute of Electrical Engineers. Preis geh. 4,— \$.

**Dr. H. von Sanden** (o. Prof. an der T. H. Hannover). Praktische Mathematik (Teubners Mathematische Leitfäden, Bd. 44), 3. erw. und umgearbeitete Aufl. 128 S. m. 25 Abb. Leipzig 1953. Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 3.20 DM.

## NACHRICHTEN

### Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Mainz vom 20.—26. September 1953

Die Tagung war mit rund 200 Teilnehmern, unter denen sich wie in den Vorjahren eine Reihe namhafter ausländischer Gäste befand, sehr gut besucht. Das reichhaltige Programm wies gegen 100 Vorträge und Berichte auf, darunter die folgenden mit vierzig bis sechzig Minuten Dauer:

- K a m k e-Tübingen, Prinzipien elektronischer Rechenmaschinen.
- G r ü n-Würzburg, Dimensionsgruppen, Liescher Ring und Hausdorffsche Formel.
- K n e s e r-Tübingen, Wertfunktion und Versicherung. Ein Beitrag zu den Grundlagen der Ökonometrie.
- S c h ä f k e-Mainz, Entwicklung analytischer Funktionen nach Biorthogonalsystemen spezieller Funktionen und Anwendungen.
- B r e l o t-Grenoble, Neuere Formulierungen für das Dirichletsche Problem und Prinzip.
- R e i t e r-Chicago, Methoden und Ergebnisse der modernen harmonischen Analyse.
- D e n y-Strasbourg, La recherche des noyaux pour lesquels il existe un théorème du balayage.
- H a m b u r g e r-Köln, Zur Theorie des Residualspektrums linearer Transformationen im Hilbertschen Raum.
- R e i d e m e i s t e r-Marburg, Rauminhalt von Polyedern.
- H o r n i c h-Graz, Lineare partielle Differentialgleichungen, deren Koeffizienten Polynome sind.
- H l a w k a-Wien, Bericht über Geometrie der Zahlen.
- H a s s e-Hamburg, Die Zetafunktionen arithmetischer Funktionenkörper I.
- D e u r i n g-Göttingen, die Zetafunktionen arithmetischer Funktionenkörper II.
- v a n d e r W a e r d e n-Zürich, Jacobische Mannigfaltigkeiten.

Die übrigen Vorträge behandelten Fragen aus folgenden Gebieten: Algebra, Gruppentheorie, Topologische Algebra, Zahlentheorie, Mengenlehre, Logik, Limitierungstheorie, Komplexe Funktionentheorie, Partielle Differentialgleichungen mit Rand- und Eigenwertproblemen, Funktionalanalysis, Geometrie einschließlich Grundlagen der Geometrie, Algebraische Geometrie, Topologie, Differentialgeometrie, Praktische Analysis, sowie zahlreiche andere Einzelfragen.

Anschließend an die Mitgliederversammlung berichtete Herr B e h n k e-Münster über die Arbeit des deutschen Unterausschusses der IMUK. Den Abschluß der Tagung bildete eine Führung durch das Institut für Praktische Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt. F. L ö s c h .  
Stuttgart.

Am 4. September 1953 verstarb im Alter von 70 Jahren Präsident a. D. Prof. Dr. Karl Willy W a g n e r an einem Herzschlag.

### R. v. Mises†

Am 20. Juli 1953 verstarb in Boston (Mass.) im Alter von 70 Jahren der ordentliche Professor der Aerodynamik und der angewandten Mathematik an der Harvard-Universität

Dr. Dr. h. c. Richard von Mises.

Es gibt wohl kaum ein Gebiet der angewandten Mathematik, das dieser vielseitige Wissenschaftler nicht durch wertvolle Arbeiten bereichert hat. Im Jahre 1920 — damals Professor der angewandten Mathematik an der Universität Berlin — gründete von Mises die „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik“, die er bis zu seiner Berufung nach Istanbul 1934 leitete. Die Ziele, die von Mises der Zeitschrift in einem einführenden Aufsatz des ersten Heftes weitschauend gesteckt hat, verfolgt sie bis heute. Zu seinem 50. und seinem 70. Geburtstage widmete sie ihm Sonderhefte. Schriftleitung und Verlag werden Richard von Mises ein ehrendes Andenken bewahren.

Schriftleitung: Willers Verlag.

München: Am 29. September 1953 verschied der Dozent an der Technischen Hochschule München Dr. Fritz Wenzl im 40. Lebensjahr.

Berlin-Lichtenberg: Am 6. Januar 1954 verschied unerwartet Dr.-Ing. Karl Borkmann im Alter von 49 Jahren.

### Internationaler Mathematiker-Kongress

Der Internationale Mathematiker-Kongress 1954 findet in der Zeit von Donnerstag, dem 2. September bis einschl. Donnerstag, dem 9. September in Amsterdam statt. Die Anschrift des Sekretariats dieses Kongresses ist:

2 e Boerhaavestraat 49, Amsterdam, The Netherlands. Der Tagungsbeitrag beträgt 50 Gld. und ist möglichst bald an die „Amsterdamsche Bank N. V., Filiaal Leiden, The Netherlands“ einzusenden. Es finden in 7 Sektionen

- (Sektion I Algebra und Zahlentheorie,
- II Analysis,
- III Geometrie und Topologie,
- IV Wahrscheinlichkeit und Statistik,
- V Mathematische Physik und angew. Mathematik,
- VI Logik und Grundlagen-Theorie,
- VII Philosophie, Geschichte und Unterricht)

45 ganz- und halbstündige Vorträge statt. Außerdem können kürzere Vorträge beim Sekretariat des Kongresses angemeldet werden. Dieser Anmeldung sollte eine kurze Inhaltsangabe von nicht mehr als 400 Worten beigelegt werden.